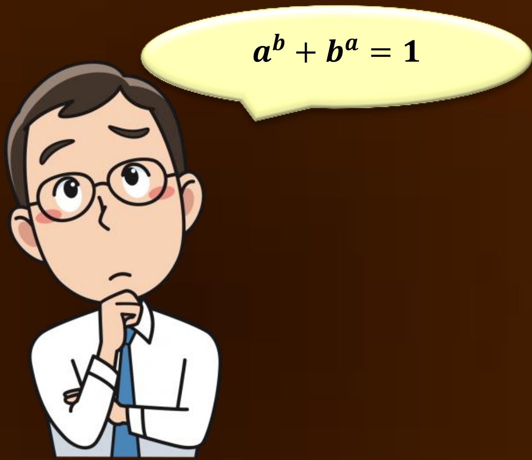
Юшин-Русанов Д.С.



ОЛИМПИАДА С НУЛЯ

- СВОЙСТВА ЧИСЕЛ
- ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
- ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ
- ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЙ
- НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Челябинск

2023

ОТ АВТОРА

Здравствуйте, уважаемые педагоги! Предлагаем вашему вниманию сборник задач для подготовки к олимпиаде по математике. Олимпиадные задачи по математике не являются частью обязательной программы, выходят за её рамки, как по содержанию, так и по уровню сложности.

Для того, что бы ребёнку научиться решать олимпиадные задачи, ему надо овладеть специальными приёмами мышления. В частности, необходимо уметь проводить логические рассуждения, перебирать варианты действий, придумывать схемы действий, проводить исследования и доказательства.

Многие типы олимпиадных задач требуют особого подхода к решению. Нельзя отправлять на олимпиаду по математике ребёнка только из-за того, что он учится отлично. Он должен быть готов к тому, что решать придётся то, с чем он не сталкивался ранее. Но уверенность в своих силах должна опираться на пройденный материал и накопленный опыт решения нестандартных задач.

Использовать сборник задач рекомендуется как инструмент для расширения математического кругозора учащихся на уроках математики, а так же, как средство для реализации индивидуального подхода к учащимся с высокой мотивацией к обучению. Подходит данное пособие и для того, что бы организовать пропедевтическую работу по подготовке учащихся 5-6 классов к муниципальному этапу всероссийской олимпиады школьников.

Для удобства материал разделён на темы. Каждая тема в данном сборнике может быть освоена за 2 академических часа.

Желаем успехов в обучении!!!

СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Приведение примера, как метод решения задач.

1. Расставить знаки действий между числами так, чтобы получилось верное равенство. Для решения достаточно привести пример.

а) $1\ 2\ 3\ 4\ 5\ =\ 50$ б) $1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 = 36$

Решение:

а) $(1+2+3+4)\cdot 5 = 50$

б) $(1+1+1+1)\cdot(1+1+1)\cdot(1+1+1) = 36$

2. Девочка заменила буквы своего имени цифрами, которые соответствуют номеру букв в русском алфавите, получилось 2011533. Как её зовут?

Решение:

Разобьём число таким образом – 20/1/15/33. Этим номерам в алфавите соответствуют буквы имени ТАНЯ.

3. Замените буквы цифрами, чтобы равенство КТО + КОТ = ТОК оказалось верным. Одинаковые буквы должны быть одинаковыми цифрами, а разные – разными.

Решение:

Приведём пример: 459 + 495 = 954

4. К числу прибавили сумму его цифр и получили 2019. Привести пример такого числа.

Решение:

Сумма цифр четырёхзначного числа не превосходит 36. Таким образом, мы понимаем, что данное число отличается от 2019 не более, чем на 36. Пробуем перебрать варианты и приведём верный пример: 1995 + 24 = 2019.

5. На складе находятся ящики с мандаринами по 8кг, 15кг и 22кг. Как кладовщику выдать ровно 100кг мандаринов, не вскрывая ящиков?

Решение:

Использовать все виды ящиков не обязательно, достаточно взять 5 ящиков по 8кг и 4 ящика по 15кг. Получаем пример $5\cdot 8 + 4\cdot 15 = 100$.

6. В магазин доставили 6 бочонков с квасом объёмом 15, 16, 18, 19, 20 и 31 литр. В первый же день нашлось два покупателя: один купил два бочонка, другой – три, причем первый купил вдвое меньше кваса, чем второй. Не пришлось даже раскупоривать бочонки. На складе остался всего лишь один бочонок. Какой именно?

Решение:

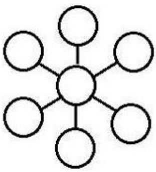
Запишем модель $(A + B) \cdot 2 = (C + D + E)$ и подумаем, какие числа можно подставить для достижения данного равенства. Примером может служить равенство $(15 + 18) \cdot 2 = (16 + 19 + 31)$. Остался бочонок объёмом 20 литров.

7. Переложить одну спичку так, чтобы равенство оказалось верным.

Решение:

Спичку от шестёрки переложим к пятёрке, получив 9 – 4 = 5.

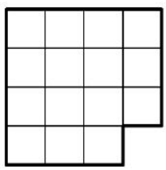
8. Числа от 1 до 7 расставить в кружки так, чтобы сумма чисел на каждой линии была равна 12.



Решение:

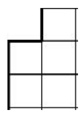
В центр поставим число 4. Далее на каждую линию поставим пары 1 и 7, 2 и 6, 3 и 5.

9. Разрезать фигуру по линиям сетки на 3 равные части.



Решение:

Фигура состоит из 15 клеток, значит, каждая из частей должна состоять из 5 клеток. Используем деталь вида:



10. Назовём число «особенным», если сумма его цифр и их произведение совпадают. Например, 123, в нём $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Существует ли девятизначное «особенное» число?

Решение:

Приведём пример: 111111135. В нём и сумма и произведение цифр равны 15.

Тема 2. Краткое рассуждение, как метод решения задач.

11. Имеются двое песочных часов: на 3 минуты и на 7 минут. Яйцо варится 11 минут. Как данными часами отмерить это время?

Решение:

Ставим часы на 3 минуты и на 7 минут одновременно. Ждём 3 минуты. Большие часы переворачиваем (в них осталось ровно 4 минуты), и ставим вариться яйцо. Ждём 4 минуты и заново переворачиваем большие часы. Ждём 7 минут и прекращаем варить яйцо. Получается, что оно варилось 4+7=11 минут.

12. У вас есть 3 котлеты и сковорода, которая вмещает 2 котлеты. Каждую сторону каждой котлеты надо жарить 1 мин. За какое наименьшее время можно пожарить все три котлеты?

Решение:

1минута: жарятся котлеты А и В с первой стороны. 2минута: жарится котлета А со второй стороны и котлета С с первой стороны, а котлету В пока вытащить. 3минута: жарятся котлеты В и С со второй стороны, а котлету А можно выложить, т.к. она уже готова. В конце 3 минуты все котлеты будут прожарены.

13. В тёмной комнате стоит шкаф, в котором 16 белых и 20 чёрных носков. Какое наименьшее количество носков (по одному) надо достать оттуда, чтобы наверняка получить пару одинакового цвета?

Решение:

Достаём первый носок и второй носок. Они могут быть одинакового цвета, но могут быть и разного. В любом случае – третий носок подойдёт к одному из них. Поэтому достаточно вытащить 3 носка.

14. В корзине лежит 40 грибов: рыжики и грузди. Известно, что среди любых 17 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 25 грибов хотя бы один груздь. Сколько рыжиков в корзине?

Решение:

Начнём вытаскивать наугад по одному грибу. В худшем случае 16 раз подряд попадётся не рыжик, но 17й гриб по условию обязательно будет рыжиком. Значит 16 грибов – грузди, остальные 24 – рыжики.

15. Чтобы накормить обезьян в зоопарке потребовалось 50 бананов. Какое наибольшее количество обезьян могло быть в зоопарке, если никакие две не получили одинаковое количество бананов?

Решение:

Начнём раздавать бананы так, чтобы всем доставалось разное количество, первой – 1 банан, второй – 2 банана, и так далее. Заметим, что 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45. Десятая обезьяна не может получить отличающееся от остальных число бананов. Поэтому, ответ – 9 обезьян. Пример: 1+2+3+4+5+6+7+8+14=50.

16. Есть 9 одинаковых на вид монет. Среди них одна фальшивая, которая весит меньше настоящей. Как с помощью двух взвешиваний определить фальшивую монету?

Решение:

Разделим их на 3 кучки по 3 монеты. За I взвешивание сравним вес любых двух кучек. Если они равны, то фальшивка в третьей кучке, если одна из них легче, то фальшивка в ней. Берём лёгкую кучку. За II взвешивание сравним вес любых двух монет из лёгкой кучки. Если они равны, то третья – фальшивка, если одна из них легче, то фальшивка она.

17. Есть 11 одинаковых на вид гирь. Среди них одна фальшивая, которая весит больше настоящей. Какое наименьшее число взвешиваний надо провести, чтобы найти фальшивую гирю?

Решение:

Разделим их на 3 кучки по 3, 3 и 5 гирь. За I взвешивание сравним кучки по 3 монеты. Если одна из них тяжелее, то фальшивка в ней. Тогда за второе взвешивание сравним любые две гири, если они равны, то фальшивка – третья, если одна из них перевесила, то она фальшивая. Но если две кучки по три гири равны по весу, то фальшивка в другой кучке. Тогда перед вторым взвешиванием 5 гирь разобьём на кучки 2, 2 и 1. За второе взвешивание сравним вес кучек по 2 гири, если они равны, то фальшивая гиря та, которая одна. Если одна из кучек перевесит, то фальшивая гиря в ней и за третье взвешивание мы определим её. Ответ – за 3 взвешивания можно однозначно определить фальшивую гирю.

18. На острове живут правдивцы, которые говорят всегда правду и лжецы, которые всегда лгут. Человек сказал: «Я лжец». Может ли он быть жителем этого острова?

Решение:

Если он правдивец, то не назвал себя лжецом, т.к. это не правда. Если он лжец, то обязательно солгал бы, сказав, что он правдивец. Поэтому данный человек не является жителем этого острова.

Тема 3. Таблицы и схемы при решении задач.

19. По дереву ползет гусеница. За день она поднимается на 6 метров, а ночью опускается на 4 метра. За сколько дней она доползет до вершины, если высота дерева 14 метров?

Решение:

Сначала, кажется, что на это уйдёт 7 дней, но это не так. Можно составить таблицу, в которой отмечается, какой высоты достигает гусеница каждый день и куда спускается каждую ночь. Так на 5й день она уже достигнет вершины.

	1	2	3	4	5
день	6м	8м	10м	12м	14м
ночь	2м	4м	6м	8м	

20. Атос, Портос и Арамис в соревновании по фехтованию заняли три призовых места. Какое место занял каждый из них, если Портос занял не второе и не третье место, а Арамис – не третье?

Решение:

В таблице отмечаем «+», если факт подтверждается, «–» если факт отрицается. Портос занял не второе и не третье место, значит, точно занял первое. Тогда никто другой не занял первое. Арамис занял не третье место, но и не первое, значит, второе. Тогда Атосу досталось третье место.

	1 место	2 место	3 место
Атос	–	–	+
Портос	+	–	–
Арамис	–	+	–

21. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся «Пепси», «Кола», «Квас» и «Спрайт». Известно, что «Спрайт» и «Пепси» не в бутылке, сосуд с «Колой» находится между кувшином и сосудом с «Квасом», в банке – не «Кола» и не «Спрайт». Стакан находится около банки и сосуда с «Пепси». Как распределены эти жидкости по сосудам?

Решение:

В таблице отмечаем «+», если факт подтверждается, «–» если факт отрицается. Все условия задачи даны, как отрицания, поэтому в таблицу вносятся 8 минусов. После чего по порядку становится ясно: «Пепси» в кувшине, а «Квас» в банке; «Кола» в бутылке, а «Спрайт» в стакане.

	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
Пепси	–	–	+	–
Кола	+	–	–	–
Спрайт	–	+	–	–
Квас	–	–	–	+

22. Есть два ведёрка на 5 и на 7 литров. Как с помощью этих ведерок и крана с водой отмерить ровно 4 литра воды?

Решение:

Наполним большое ведро, перельём из него 5л в маленькое, останется 2л. Опустошим маленькое ведро, перельём в него 2л из большого. Вновь заполним большое ведро, перельём из него 3л в маленькое. Так в большом ведре останется 4л воды.

	Начало	1ход	2ход	3ход	4ход	5ход	6ход
5л	0	0	5	0	2	2	5
7л	0	7	2	2	0	7	4

23. Есть три кастрюли: 8 л – с компотом, 3 л и 5 л – пустые. Как разделить компот пополам? (Компот как воду выливать нельзя.)

Решение:

Заполним среднюю кастрюлю, а из неё перельём 3л в маленькую. Эти 3л сольём в большую кастрюлю. Из средней кастрюли 2л переливаем в маленькую, затем из большой кастрюли заполняем среднюю. Из средней кастрюли 1л переходит в маленькую, затем из маленькой всё переливаем в большую. Так в большой и в средней кастрюле оказалось по 4л компота, т.е. поровну.

	Начало	1ход	2ход	3ход	4ход	5ход	6ход	7ход
8л	8	3	3	6	6	1	1	4
5л	0	5	2	2	0	5	4	4
3л	0	0	3	0	2	2	3	0

24. В пруду живут 30 щук и больше никаких рыб. Щуки могут есть только друг друга. Щука считается сытой, если она съела трёх рыб. Какое наибольшее число щук сможет стать сытыми?

Решение:

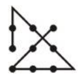
Множество щук изобразим как 30 клеточек. Если щука стала сытой, отметим её буквой «С», если щука была съедена – поставим «!». Когда 7 щук станут сытыми, 21 щука будет съедена, 2 щуки – живые и голодные. Эти две щуки могут съесть по три сытых. Тогда сытыми успеют стать максимум 9 щук.

С!	**С!**	**С!**	**С!**	**С!**	**С!**
С	**С**	**С**	**!**	**!**	**!**
!	**!**	**!**	**!**	**!**	**!**
!	**!**	**!**	**!**	**!**	**!**
!	**!**	**!**	**!**	**!**	**!**

25. Не отрывая руки, соедините 9 точек четырьмя прямыми линиями.

Решение:

Такое возможно сделать, если выйти за пределы «квадрата», который искусственно вводит нас в заблуждение, т.к. ограничений на длину линий нет!



26. Можно ли числа от 1 до 9 расставить в клетки квадрата 3×3, чтобы в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали сумма чисел была одинаковой?

Решение:

Главная проблема задачи в центральном числе. В силу своеобразной симметрии там должно стоять число 5, иначе решение не получится.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

27. На шахматной доске 4×4 стоит «особая» ладья, которая ходит как и обычная – по горизонтали и по вертикали, но только не на соседнюю клетку. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, побывав на каждой клетке 1 раз и вернуться в исходную клетку?

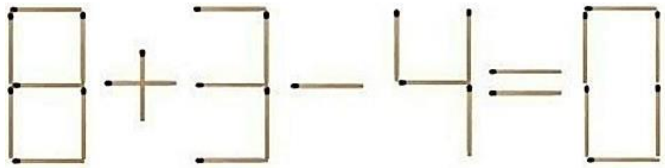
Решение:

В таблице отмечаем 0 – исходное место, оно же и 16. Каждый шаг номеруем согласно написанным правилам.

0/16	6	1	15
10	8	11	9
3	5	2	4
13	7	12	14

Тема 4. Повторение изученного материала.

28. Переложите одну спичку так, чтобы равенство оказалось верным.



Решение:
Спичку от восьмёрки переложим к нулю. Получим 9 + 3 – 4 = 8.

29. Числа от 1 до 6 расставьте в окошки, чтобы равенство выполнялось.

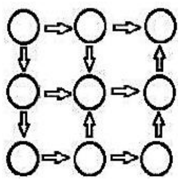
$\square + \square \cdot \square + \square = \square\square$

Решение:
Достаточно привести пример $2 + 4 \cdot 6 + 5 = 31$

30. Девочка зашифровала пункты прибытия и отправления поезда с помощью цифр, которые соответствуют номеру букв в русском алфавите 211221 – 21221. Откуда и куда идёт поезд?

Решение:
Разделим цифры таким образом: 2/1/12/21 – 21/22/1. Этим номерам соответствуют буквы слов БАКУ – УФА.

31. Расставьте числа от 1 до 9 в кружки так, чтобы каждая стрелка вела от меньшего числа к большему.



Решение:
Чем больше стрелок надо пройти до кружка, тем больше число в нём. Логично, что верхний левый угол – 1, а верхний правый – 9.

1	2	9
3	6	8
4	5	7

32. В кругу стоят девочки: Ася, Катя, Галя и Нина, одетые в зелёное, голубое, белое, розовое платья. Девочка в зелёном платье (не Ася и не Катя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Катей. Какого цвета платье было надето на каждой из девочек?

Решение:

	Зеленое	Голубое	Белое	Розовое
Ася	–	–	+	–
Катя	–	+	–	–
Галя	+	–	–	–
Нина	–	–	–	+

Для решения надо будет изобразить схематично, как стоят девочки, без этого будет сложно разобраться.

33. Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но неизвестно, легче она или тяжелее. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. Саму монету определять не нужно.

Решение:

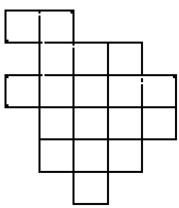
Кладём на каждую чашу по 50 монет. Если чаши будут весить одинаково, то оставшаяся монета фальшивая, а монеты, которые лежат на чашах, настоящие. Чтобы узнать, тяжелее или легче весит фальшивая настоящей, достаточно сравнить ее с любой настоящей монетой. Если же одна из чаш весит больше другой, то возьмем ее и разобьем на две кучки по 25 монет. Если они весят одинаково, то фальшивая монета была на другой чаше, значит, фальшивая легче. Если же одна из чаш перевесит, то фальшивая монета была в этих 50, т.е. фальшивая тяжелее.

34. На улице встретились два жителя острова правдивцев и лжецов. Первый из них сказал: "По крайней мере, один из нас правдивец". Второй ему ответил: "Ты лжец". Кто из них кто?

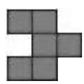
Решение:

Если бы 1й был лжецом, то он соврал бы, и среди них нет правдивца, они оба лжецы, но тогда второй, лжец, не мог сказать правду про первого! Следовательно, 1й – не лжец. Если 1й – правдивец, то он сказал правду. Тогда 2й – лжец, он солгал, назвав 1го лжецом. Всё сходится. Ответ: 1й – правдивец, 2й – лжец.

35. Разрезать фигуру по линиям сетки на 3 равные части.



Решение:

Фигура состоит из 18 клеток, значит, каждая из частей должна состоять из 6 клеток. Используем деталь вида: 

Тема 5. Арифметический подход к решению задач.

36. Сколькими нулями заканчивается такое произведение чисел: $2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot \ldots \cdot 2020$?

Решение:

Нуль на конце числа получается, если в произведении есть множитель 10. В свою очередь 10 получается, когда 2 умножается на 5. На 2 делится каждое второе число, т.е. двоек много. На 5 делится только каждое пятое число. В данном произведении на 5 делятся числа 2000 (3 раза); 2005 (1 раз); 2010 (1 раз); 2015 (1 раз); 2020 (1 раз). Всего множитель 5 встречается в этом произведении 7 раз. Значит оно будет оканчиваться семью нулями.

37. Натуральные числа от 1 до 9 разделили на три группы. Могло ли получиться так, что сумма чисел в каждой группе одинакова?

Решение:

Найдём сумму всех чисел 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45. Делим 45:3=15. В каждой группе чисел сумма должна быть 15. Пробуем привести пример: 7+8=1+9+5=2+3+4+6.

38. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго - 33. Сколько монет было у первого пирата до начала игры?

Решение:

Рассуждаем с конца к началу. До 3й игры у первого пирата было 30 монет, у второго 18. До 2й игры у первого пирата было 12 монет, у второго 36. До 1й игры у первого пирата было 24 монеты, у второго тоже 24. Ответ: 24 монеты.

39. Количество цифр, потребовавшихся для нумерации всех страниц энциклопедического словаря, не превосходит 2020 (первая страница имеет номер 1). Если бы в словаре было на одну страницу больше, то это количество превысило бы 2020. Сколько страниц в словаре?

Решение:

На однозначные номера (с 1 по 9) ушло 9 цифр; на двузначные номера (с 10 по 99) ушло 180 цифр; итого 189 цифр; считаем 2020 – 189 = 1831. Это число при делении на 3 даёт частное 610 и остаток 1. Значит, всего 9+90+610=709 страниц.

40. Девять осликов за 3 дня съедают 27 мешков корма. Сколько корма надо 5 осликам на 5 дней?

Решение:

1) 27:3 = 9 мешков надо 9 осликам на 1 день;

2) 9:9 = 1 мешок нужен 1 ослику на 1 день;

3) $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ мешков надо 5 осликам на 5 дней.

Ответ: 25 мешков.

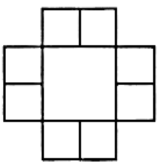
41. На окраску деревянного кубика затратили 5 г краски. Когда она высохла, кубик распилили на 8 одинаковых кубиков меньшего размера. Сколько краски потребуется для того, чтобы закрасить образовавшиеся при этом неокрашенные поверхности?

Решение:

У каждого из 8 кубиков будет по 3 неокрашенных грани и 3 окрашенных. То есть для того, чтобы покрасить чистые грани нужно столько же краски – 5г.

42. Периметр фигуры, сложенной из 9 квадратов, равен 32см. Найдите площадь этой фигуры.

Решение:



1) 32:16 = 2см – сторона маленького квадратика;

2) $2 \cdot 2 = 4$см^2– площадь маленького квадратика;

3) $4 \cdot 8 = 32$см^2– площадь всех маленьких квадратов;

4) $4 \cdot 4 = 16$см^2– площадь большого квадрата;

5) 32+16=48см^2– площадь всей фигуры;

43. Из двух городов на расстоянии 240км навстречу друг другу выехали одновременно два автомобиля, скорости которых 45км/ч и 75км/ч. Вместе с первым автомобилем вылетела ласточка со скоростью 63км/ч. Она долетает до второго автомобиля, разворачивается и летит до первого, разворачивается и летит до второго, и так далее. Сколько километров пролетит ласточка к моменту, когда автомобили встретятся?

Решение:

1) 45+75=120км/ч – скорость сближения автомобилей;

2) 240:120 = 2ч – время, через которое встретятся автомобили;

3) $63 \cdot 2 = 126$км – пролетит ласточка за это время;

Комментарий: не важно, в каком направлении летала всё это время ласточка, главное, что известна её скорость и время, в течение которого она двигалась.

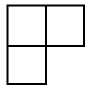
Тема 6. Доказательство, как метод решения задач.

44. В финальном матче школьного чемпионата по баскетболу команда 5А забросила 9 мячей. Докажите, что найдутся два игрока этой команды, забросившие поровну мячей. (В команде по баскетболу 5 игроков.)

Доказательство:

Предположим, это не так, и все игроки забросили разное количество мячей. Тогда первый мог забросить – 0, второй – 1, третий – 2, четвертый – 3, пятый – 4мяча. Тогда минимум было заброшено 0+1+2+3+4=10 мячей, но мячей было 9. Получаем противоречие, значит наше предположение неверно, и найдутся два игрока, забросившие мячей поровну.

45. В игре «гигантские шахматы» игровое поле состоит из клеток и имеет размер 124×124 клетки. Фигура «волшебный конь» имеет странную форму и стоит сразу на трёх клетках, как показано на рисунке (можно переворачивать его в любую сторону). Можно ли заполнить всё игровое поле волшебными конями так, чтоб пустых клеток не осталось? Докажите свой ответ.



Доказательство:

Этого сделать нельзя! Шахматное поле содержит 124×124 клеток. Если разложить на простые множители, то получится 31×2×2×31×2×2. Данное произведение не содержит множителя 3, значит, оно не делится на 3. Но фигура «волшебный конь» состоит из трёх клеток. Поэтому, такой фигурой не получится замостить всё игровое поле.

46. Можно ли все 2320кг апельсинов упаковать в ящики по 56кг и 21кг? Свой ответ докажите.

Доказательство:

Этого сделать нельзя! Суммируя ящики по 21кг и по 56кг, мы всегда будем получать число, делящееся на 7, т.к. сами числа 21 и 56 делятся на 7. Но число 2320 не делится на 7. Значит, его нельзя получить в виде суммы нескольких ящиков по 21кг и 56кг.

47. У Маши есть прямоугольный кусок ткани 3 метра длиной и 2 метра шириной. Может ли она потратить его без остатка на то, чтобы сшить шарфы длиной 150см и шириной 15см? Ответ докажите.

Доказательство:

Нет, не сможет. Предположим, 300:150=2 шарфа входят по длине без остатка. Но по ширине 200см не делится на 15см. Теперь наоборот, 300:15=20 шарфов входят по длине без остатка. Но по ширине 200 не делится на 150. Предположим, материал можно вырезать по-разному, но площадь исходного куска 60000см.кв. не делится на площадь одного шарфа 2250см.кв., всё равно остаток будет.

48. В ящике лежат 3 красных, 5 синих, 4 зелёных, 2 жёлтых шара. Сколько шаров надо вынуть, чтобы достать два шара одинакового цвета? Свой ответ докажите.

Доказательство:

Ответ – 5 шаров. В худшем случае каждый вытянутый шар будет разного цвета: первый, второй, третий, четвёртый. Но пятый шар повторит один из уже имеющихся цветов.

49. Не производя вычислений, докажите, что сумма чисел 1+2+3+4+5+…+2019 делится на 3.

Доказательство:

Докажем сначала, что сумма трёх последовательных чисел всегда делится на 3. Рассмотрим числа А; А+1; А+2. Их сумма 3А+3 без остатка делится на 3. Теперь 2019 слагаемых можно разбить на 673 тройки последовательных чисел. Так как каждая тройка в сумме делится на 3, то и 1+2+3+…+2019 делится на 3.

50. Докажите, что среди любых четырёх натуральных чисел найдётся пара чисел, разность которых делится на 3.

Доказательство:

При делении на 3 числа могут давать остатки 0,1,2 (три разных остатка). Если находится пара чисел, дающих одинаковый остаток при делении на 3, их разность будет делиться на 3. В худшем случае у трёх чисел остатки от деления будут разными, но у четвертого числа остаток обязательно совпадёт с одним из имеющихся, и их разность будет делиться на 3.

51. Докажите, что между четырьмя последовательными натуральными числами всегда можно расставить некоторые знаки действий так, чтобы результат делился на 12.

Доказательство:

Каждое четвертое натуральное число делится на 4, а каждое третье делится на 3. Значит, среди четырёх последовательных натуральных чисел всегда найдутся числа, делящиеся на 3 и на 4. Достаточно умножить все 4 числа, их произведение будет делиться на 12.

Тема 7. Уравнения в натуральных числах.

52. Решить уравнение в натуральных числах: $3x - y = 5$

Решение:

Выразим $y = 3x - 5$. Вместо x можно взять число не менее 2. Составим таблицу значений пар чисел x и y, которые будут решением. У данного уравнения будет бесконечно много решений, т.к. перебирая по порядку все x мы будем получать новое значение y.

x	2	3	4	…
y	1	4	7	…

53. Решить уравнение в натуральных числах: $7x - 2y = 32$

Решение:

Выразим $7x = 2y + 32$. Правая часть уравнения делится на 2, значит и левая часть должна делиться на 2, следовательно, x – чётное число. Составим таблицу значений пар чисел x и y, которые будут решением. У данного уравнения будет бесконечно много решений. Перебирая все чётные x, начиная с 6, мы будем получать новые значения y.

x	6	8	10	…
y	5	12	19	…

54. Решить уравнение в натуральных числах: $x + 2y = 8$

Решение:

Выразим $x = 8 - 2y$. Вместо y можно подставить только 1,2,3, чтобы получить натуральное число x. Поэтому уравнение имеет только 3 решения.

x	6	4	2
y	1	2	3

55. Решить уравнение в натуральных числах: $23x + 13y + 14z = 50$

Решение:

Заметим, что сумма коэффициентов при неизвестных 23+13+14=50. Уравнение может иметь решение, если каждое неизвестное равно 1. Если хотя бы одно из неизвестных будет больше единицы, то их сумма будет больше 50, поэтому других решений нет. Поэтому, данное уравнение имеет единственное решение.

x	1
y	1
z	1

56. Решить уравнение в натуральных числах: $3x + 6y = 143$

Решение:

Заметим, что левая часть уравнения делится на 3, а правая, число 143 – не делится на 3. Значит, какие бы x и y мы не пытались подставить, уравнение не будет иметь решения в натуральных числах.

57. Решить уравнение в натуральных числах: $5x + 17y = 21$

Решение:

Заметим, что при подстановке вместо неизвестных даже самых маленьких натуральных чисел (1;1), результат будет 22, что больше, чем 21. И чем больше будут неизвестные, тем больше будет результат, поэтому уравнение не имеет решений в N.

58. Решить уравнение в натуральных числах: $31x + 13y = 87$

Решение:

Заметим, что пары чисел (1;1), (1;2), (2;1) при подстановке в уравнение дают результаты меньше 87, а любые другие пары чисел дают результат больше 87. Поэтому, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

59. Решить уравнение в натуральных числах: $x \cdot y = 6$

Решение:

Составим таблицу пар чисел, удовлетворяющих уравнению. Для этого надо перебрать все пары чисел, произведение которых равно 6.

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

60. Решить уравнение в натуральных числах: $(x + 23) \cdot (y - 32) = 59$

Решение:

Число 59 – простое, его можно получить только умножением $59 \cdot 1$. Рассмотрим два варианта. Первый вариант $(x + 23) = 1$, $(y - 32) = 59$ не имеет смысла, так как не найдётся подходящее натуральное число x. Второй вариант наоборот $(x + 23) = 59$, $(y - 32) = 1$ имеет решение при x=36, y=33. Так как по-другому разложить на множители 59 нельзя, то это единственное решение.

x	36
y	33

61. Решить уравнение в натуральных числах:

$$(2x + 3) \cdot (y + 1) \cdot (3z + 2) = 385$$

Решение:

Число 385 можно разложить на множители $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. Использовать другие разложения, в которых есть единица, нельзя, т.к. по каждому множителю видно, что при любом значении неизвестных, он будет больше 1.

1) Пусть $2x+3=5$, тогда $x=1$; $y+1=7$, тогда $y=6$; $3z+2=11$, тогда $z=3$. Получаем первое решение (1;6;3).

2) Пусть $2x+3=5$, тогда $x=1$; $y+1=11$, тогда $y=10$; $3z+2=7$, тогда z не может быть натуральным числом. Решения нет.
3) Пусть $2x+3=7$, тогда $x=2$; $y+1=5$, тогда $y=4$; $3z+2=11$, тогда $z=3$. Получаем второе решение (2;4;3).
4) Пусть $2x+3=7$, тогда $x=2$; $y+1=11$, тогда $y=10$; $3z+2=5$, тогда $z=1$. Получаем третье решение (2;10;1).
5) Пусть $2x+3=11$, тогда $x=4$; $y+1=7$, тогда $y=6$; $3z+2=5$, тогда $z=1$. Получаем четвертое решение (4;6;1).
6) Пусть $2x+3=11$, тогда $x=4$; $y+1=5$, тогда $y=4$; $3z+2=7$, тогда z не может быть натуральным числом. Решения нет.
Собираем полученные решения в таблицу:

x	1	2	2	4
y	6	4	10	6
z	3	3	1	1

62. В 5А, в котором всего 20 учеников, а девочек меньше, чем мальчиков, ребята решили подарить на 8 марта каждой учительнице букет из 7 роз, каждой девочке букет из 5 роз. Вовочке поручили купить розы. Он посчитал и купил 84 розы. Сколько мальчиков в этом классе?

Решение:

Пусть x – число учительниц, y – число девочек в 5А. Тогда моделью данной задачи является уравнение: $7x + 5y = 84$. Выразим $5y = 84 - 7x$. Правая часть уравнения делится на 7, значит, левая тоже должна делиться на 7, то есть, число y должно быть кратно 7. В классе может учиться либо 7 либо 14 девочек (так как их не может быть больше 20). Но так как девочек меньше, чем мальчиков, то есть смысл проверить только число 7. Если девочек 7, то число учительниц тоже 7, уравнение решает пара чисел (7;7). Ответ: в классе учится 13 мальчиков.

63. Небольшую детскую площадку прямоугольной формы решили выложить плиткой квадратной формы. Известно, что стороны площадки равны целому числу такой плитки. Плитка продавалась в пачке, в которой было 763 штуки. Укладчик плитки сказал – если бы длина площадки была на 7 плиток меньше, а ширина в 3 раза больше, то всю плитку я израсходовал бы без остатка. Не ошибся ли он?

Решение:

Пусть x – число плиток по ширине, y – число плиток по длине. Тогда моделью данной задачи является уравнение: $3x \cdot (y - 7) = 763$. Укладчик ошибся хотя бы потому, что левая часть уравнения делится на 3, а правая не делится, и оно не имеет решения в натуральных числах.

Тема 8. Повторение изученного материала.

64. Решите ребус: КОКА + КОЛА = ВОДА. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Решение:

Достаточно привести пример: 3930 + 3980 = 7910. Но как к нему приблизиться? Понятно, что А=0, т.к. число единиц при сложении не поменялось. При этом О не может быть равно 0, т.к. разные буквы означают разные цифры. Поэтому такое возможно, если при сложении десятков мы запоминали и перенесли несколько единиц. 9+9=18, но, т.к. 1 запоминали, то будет 19. Остальные цифры подбираются интуитивно.

65. Три курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 6 куриц за 6 дней?

Решение:

1) 3:3 = 1яйцо несут три курицы за 1 день;
2) Тогда 6 куриц могут снести 2 яйца за 1 день;
3) Если дней будет 6, то они снесут в 6 раз больше яиц, т.е. 12 штук. Ответ: 12.

66. Три медвежонка делили три кусочка сыра массой 10 г, 12 г и 15 г. Лиса стала им помогать. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить медвежатам равные кусочки сыра?

Решение:

Оформим таблицу, в которой покажем по ходам, как лиса может уравнять эти числа, откусывая по 1г от двух кусочков каждый ход.

10г	10г	10г	10г	9г	9г	8г	8г	7г
12г	11г	10г	9г	9г	8г	8г	7г	7г
15г	14г	13г	12г	11г	10г	9г	8г	7г

67. В мешке лежали карточки с числами от 1 до 20. Влад вытащил 6 карточек и сказал, что все эти карточки можно разбить на пары так, что суммы чисел в каждой паре одинаковые. Лена успела подсмотреть 5 карточек Влада: на них были написаны числа 2, 4, 9, 17, 19. Карточку с каким числом не успела подсмотреть Лена?

Решение:

Заметим, что 17+4 = 19+2 = 21. Остаётся число 9, к нему можно прибавить 12, тогда тоже получится 21. Ответ: число 12.

68. За круглым столом сидят 7 человек. Каждый из них сказал: «мои соседи – правдивец и лжец». Сколько там правдивцев и сколько лжецов на самом деле? (Правдивцы всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут)

Решение:
Если все будут лжецы, то всё сходится, ведь каждый из них соврал. Если бы хотя бы один из них был правдивцем, то цепочка замкнулась бы на лжецах, говорящих правду, что невозможно. Ответ: 7 лжецов и 0 правдивцев.

69. Маше утром подарили новогодний кулёк с конфетами. Каждое утро она съедает 2 конфеты, а каждый вечер треть оставшихся конфет. В четвёртый вечер она обнаружила в кульке 2 конфеты, которые тут же съела. Сколько конфет было в кульке?
Решение:
Составим таблицу и будем заполнять её, решая задачу от 4го дня к 1му.

Вечер-4	Утро-4	Вечер-3	Утро-3	Вечер-2	Утро-2	Вечер-1	Утро-1
2	4	6	8	12	14	21	23

Т.к. по утрам она ела по 2 конфеты, то возвращаясь назад, мы будем каждое утро прибавлять 2 штуки. Т.к. по вечерам она съедала треть конфет, то на утро оставалось две трети. Поэтому, чтобы получить число конфет предшествующего вечера, надо утрешнее число разделить на 2 и умножить на 3. Так каждый раз. Получается, что изначально в кульке было 23 конфеты.

70. У отца есть три сына, родившихся в один и тот же день, но в разные годы. Младшему 2 года. Через 12 лет возраст отца станет равен сумме возрастов всех сыновей. Найдите нынешний возраст среднего и старшего сына, если отцу сейчас 33 года.
Решение:
Если сейчас отцу 33, то через 12 лет ему будет 45. Значит, сумма трёх возрастов сыновей будет 45 лет. Вычтем из 45 три раза по 12, чтобы «вернуться в прошлое». Получается, что 12 лет назад сумма их возрастов была 9лет. Так как младшему было 2 года, то сумма возрастов среднего и старшего равна 7 лет. Поскольку всем трём братьям разное количество лет, то среднему 3 года, а старшему 4 года. Ответ: 3 и 4 года.

71. Кузнечик и сверчок прыгают в противоположных направлениях, начав из одной точки: кузнечик по 63см, а сверчок по 117см, но неизвестно, как часто они прыгают. Может ли между ними через некоторое время быть ровно 1709см?
Решение:
Задаче соответствует уравнение в натуральных числах: $63x + 117y = 1709$, где x – число прыжков кузнечика, y – число прыжков сверчка. Левая часть уравнения делится без остатка на 9, но правая часть, число 1709 не делится на 9. Значит, это уравнение не имеет решения в натуральных числах. Ответ: нет.

Тема 9. Решение задач с помощью уравнений.

72. Летит по небу лебедь, а навстречу ему гуси. "Здравствуйте, 100 гусей", - говорит им лебедь, а они ему отвечают: "Нас не 100! Но если к нам подлетит ещё столько же, и ещё половина и ещё четверть, то вместе с тобой нас будет 100». Сколько гусей встретил лебедь?

Решение:

Пусть x – реальное число гусей, тогда $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$. Решим это уравнение: $2\frac{3}{4}x = 99$, $x = 99 : 2\frac{3}{4} = 99 \cdot \frac{4}{11} = 36$ гусей. Ответ: 36 гусей.

73. Алёша и Боря вместе весят 82кг, Алёша и Вова весят 83кг, Боря и Вова весят 85кг. Сколько весят вместе Алеша, Вова и Боря.

Решение:

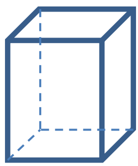
Пусть x, y, z - вес Алёши, Бори, Вовы. Имеем 3 уравнения: 1) $x + y = 82$; 2) $x + z = 83$; 3) $y + z = 85$. Сложим их: $2x + 2y + 2z = 250$. Данное равенство разделим на 2, получим $x + y + z = 125$. Значит, общий вес трёх ребят составляет 125кг.

74. Поезд проходит мимо светофора за 5с. Мимо платформы длиной 150м он проходит за 15с. Найдите длину поезда в метрах.

Решение:

Пусть x - скорость поезда. Тогда из первого предложения следует, что длина поезда равна $5x$. Длина поезда вместе с платформой равна $5x + 150$. Из второго предложения получаем уравнение: $5x + 150 = 15x$, $10x = 150$, $5x = 75$. То есть длина поезда равна 75м.

75. Коробка имеет квадратное дно. Таня каждый день наклеивает на неё квадратную наклейку 1×1см так, чтобы пустого места не было. Наклейки не могут накладываться друг на друга и не могут быть на нескольких гранях одновременно. Через 58 дней коробка со всех сторон полностью была в наклейках. Найти высоту коробки.



Решение:

Пусть x – площадь дна или крышки коробки y – площадь любой из боковых сторон коробки. Тогда площадь всей поверхности коробки $2x + 4y = 58$. Разделим на 2 уравнение. $x + 2y = 29$. Так как x – квадрат числа и так как сумма 29 - нечётная, то он x может принимать значения 1, 9, 25. Если x=1, то y=14, тогда высота коробки 14см. Если x=9, то y=10, что невозможно, т.к. высота получится не натуральным числом. Если x=25, то y=2, но высота не получится натуральным числом. Ответ: 14см.

76. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов – 30, и количество ног – 84. Сколько поросят было на школьном дворе?

Решение:

Пусть x – число поросят, тогда $(30 - x)$ – число гусей. Составим уравнение: $4x + 2(30 - x) = 84$, $4x + 60 - 2x = 84$, $2x = 24$, $x = 12$. Ответ: 12 поросят.

77. На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, тех, кто выше него, в четыре раза больше, чем тех, кто ниже него. Лёня заметил, что тех, кто выше него, в три раза меньше, чем тех, кто ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30?

Решение:

Пусть x – число детей ниже Димы, тогда $4x$ – число детей выше Димы. И всего в классе $(5x + 1)$ детей. С другой стороны пусть y – число детей выше Лёни, тогда $3y$ – число детей ниже Лёни. И всего в классе $(4y + 1)$ детей. Приравняем выражения $5x + 1 = 4y + 1$, откуда $5x = 4y$. Так как детей не более 30, то единственная пара чисел, удовлетворяющих уравнению (4; 5). Подставив их в исходное уравнение, получаем, что в классе 21 ученик. Ответ: 21.

78. В поезде 18 одинаковых вагонов. В некоторых вагонах свободна половина мест, в некоторых других – треть мест, а в остальных заняты все места. При этом во всём поезде свободна ровно одна девятая всех мест. В скольких вагонах все места заняты?

Решение:

Пусть x – число вагонов наполовину свободных, у – число вагонов на треть свободных, число пассажиров в вагоне примем за 1. Тогда справедливо уравнение: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 18 \cdot \frac{1}{9}$. Преобразуем его к виду: $3x + 2y = 12$. Единственное решение в натуральных числах (2; 3). Тогда всего со свободными местами 5 вагонов. 18 – 5 = 13 вагонов – полностью заняты. Ответ: 13 вагонов.

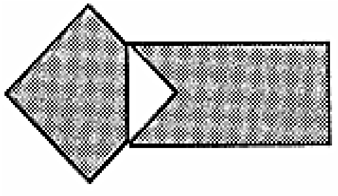
79. Вчера Никита купил несколько ручек: чёрные – по 9 рублей за штуку и синие – по 4 рубля за штуку. Зайдя сегодня в тот же магазин, он обнаружил, что цены на ручки изменились: чёрные стали стоить 4 рубля за штуку, а синие – 9 рублей. Увидев такое, Никита сказал с досадой: “Покупай я те же ручки сегодня, сэкономил бы 49 рублей”. Не ошибается ли он?

Решение:

Пусть x – число чёрных ручек, y – число синих. Тогда он потратил $(9x + 4y)$ рублей. Если цены поменялись, то теперь такая покупка стоит $(4x + 9y)$ рублей. По словам Никиты $(9x + 4y) - (4x + 9y) = 49$. Раскрываем скобки и упрощаем: $5x - 5y = 49$. Левая часть уравнения делится на 5, но правая, число 49, не делится на 5. Следовательно, уравнение не имеет решения в натуральных числах. Он ошибся.

Тема 10. Геометрические задачи.

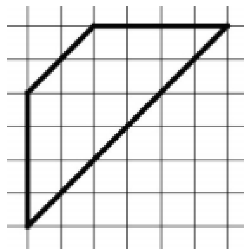
80. На рисунке изображено как квадрат со стороной 6см и прямоугольник со сторонами 4см и 9см пересекаются. Докажите, что площади заштрихованных частей этих фигур равны.



Доказательство:

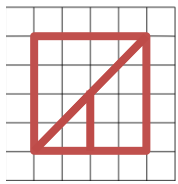
Площадь квадрата равна 36см.кв. и площадь прямоугольника равна 36см.кв. От каждой фигуры отрезана одинаковая треугольная часть. Если от равных площадей отнять равные части, то оставшиеся части тоже будут равны. Что и требовалось доказать.

81. Покажите, как разрезать фигуру на 3 части, чтобы переложить их и получить квадрат.

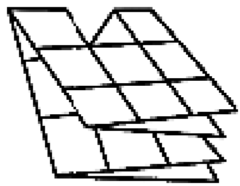


Решение:

Достаточно привести пример:

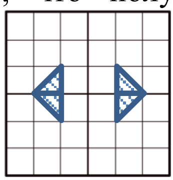


82. Листок 6×6 клеток свернули и вырезали часть, как показано на рисунке. После этого его развернули. Нарисуйте то, что получится в развёрнутом виде.

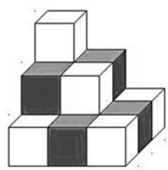


Решение:

Достаточно привести рисунок:



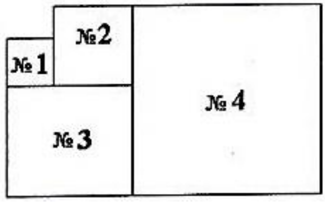
83. Фигурку склеили из кубиков в три яруса, как показано на рисунке. В каждом ярусе кубики чередуются по цвету через один. Затем все белые грани перекрасили в чёрный цвет, а все чёрные – в белый. На 1 грань уходит 1 грамм краски. Сколько граммов чёрной краски для этого понадобилось?



Решение:

Посчитаем все белые грани, которые видны на рисунке. Их 26. Значит, для покраски их в чёрный цвет ушло 26г чёрной краски.

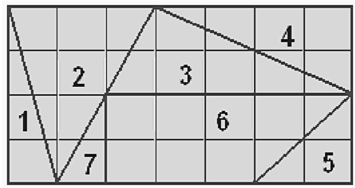
84. На рисунке изображены четыре квадрата. Периметр первого 16см, периметр второго 24см. Найдите площадь четвёртого квадрата.



Решение:

1) Сторона первого 16:4 = 4см
2) Сторона второго 24:4 = 6см
3) Сторона третьего 4+6 = 10см равна сумме сторон 1го и 2го.
4) Сторона четвёртого 10+6 = 16см равна сумме сторон 2го и 3го.
5) Площадь четвёртого равна 16×16 = 25см.кв. Ответ: 256см.кв.

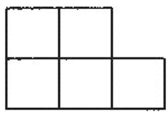
85. Пять Маленьких Поварят решили разделить между собой большую прямоугольную шоколадку. Но она упала на пол и когда они развернули ее, то увидели, что шоколадка разбилась на 7 кусков. Николай съел самый большой кусок. Света и Маша съели одно и тоже количество шоколада, но Света съела три куска, а Маша только один кусок. Белла съела 1/7 часть целой шоколадки, Катя съела все остальное. Укажите для каждого поварёнка номера кусочков, которые они съели?



Решение:

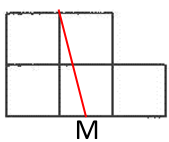
Найдём площади всех треугольников. $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 5$, $S_4 = 4$, $S_5 = 2$, $S_6 = 8$, $S_7 = 1$ кв. ед. (любым известным способом). Николай съел самый большой кусок - №6, Белла съела седьмую часть от всего - №4, куски №1,5,7 в сумме равны куску №3. Поэтому Света съела - №1,5,7, а Маша - №3. Оставшийся кусок съела Катя - №2.

86. На рисунке фигура из 5 одинаковых квадратов. Одной прямой разрежьте её на две части, равные по площади.

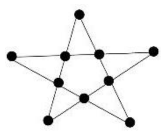


Решение:

Пусть площадь квадрата равна 1. Тогда площадь всей фигуры равна 5, если поделим пополам, то будет $2\frac{1}{2}$. Получить фигуру такой площади можно так, как показано на рисунке. Точка М – середина стороны квадрата. Отсечённая фигура (трапеция) состоит из двух целых квадратов и прямоугольного треугольника, площадь которого равна половине единицы.



87. Соедините на плоскости 10 точек пятью линиями так, чтобы на каждой линии оказалось ровно 4 точки.



Решение:

Можно изобразить пятиконечную звезду, она удовлетворяет условию задачи.

Тема 11. Числа и их свойства.

88. В двузначном числе поменяли местами цифры. Могло ли при этом число увеличиться ровно в 6 раз?

Решение:

Двузначное число $\overline{ab} = 10a + b,$ после замены цифр $\overline{ba} = 10b + a.$ По условию задачи: $6(10a + b) = 10b + a.$ Преобразуем к виду $59a = 4b$. Видно, что b должно быть кратна 59, но это не возможно, т.к. b – цифра. Ответ: нет.

89. В ряд выписано 11 чисел так, что сумма любых трёх идущих подряд чисел равна 18. При этом сумма всех чисел равна 64. Найдите центральное число.

Решение:

Пусть суммы первой, второй и третьей тройки чисел равны 18, то есть первые девять чисел в сумме равны 54. Тогда последние два числа в сумме должны быть равны 10. Если это так, то число перед ними обязательно равно 8. Приведём пример такого ряда 3 7 8 3 7 8 3 7 8 3 7. В любом примере в центре число 8.

90. В трёхзначном числе поменяли местами первую и последнюю цифру. При этом получилось число меньшее на 693. Приведите пример исходного числа.

Решение:

Трёхзначное число $\overline{abc} = 100a + 10b + c,$ после замены первой и последней цифр $\overline{cba} = 100c + 10b + a.$ Вычитаем из первого числа второе, получаем 693. Уравнение: $99a - 99c = 693$ можно поделить на 99, получим $a - c = 7$. Найдётся только два решения: (9; 2) или (8; 1). Цифра стоящая посередине может быть любой. Примером могут служить числа 952, 831 и другие.

91. Вася и Петя играют в игру. На столе у них 10 карточек, с обратной стороны которых написаны числа от 0 до 9. Они одновременно берут по одной карточке, побеждает тот, у кого число больше, и ему присуждаются очки, равные разности этих чисел. (Например, Вася тянет 5, а Петя 3. Значит Васе присуждается 2 очка). Игра идёт 5 раундов, пока карточки не кончатся. Может ли Вася выиграть игру со счётом 11 : 2 ?

Решение:

Может. Приведём пример пяти раундов в виде таблицы:

Вася	9	8	6	3	1
Петя	0	7	5	4	2

Первые три раунда Вася выигрывает 9+1+1=11 очков, последние два – выигрывает Петя 1+1=2 очка. Подойдут и другие примеры.

92. Женя ежедневно записывает дату и вычисляет произведение написанных цифр. Например, 19-го марта она написала 19.03 и вычислила произведение 1*9*0*3=0. Какое самое большое произведение она может получить?

Решение:

Все месяца, кроме 11 и 12 содержат в записи 0, что обратит всё произведение в 0. Поэтому, стоит выбрать 12 месяц. Число месяца, у которого произведение цифр наибольшее – 29. Выбираем дату 29.12. Произведение цифр 36.

93. Владимир, выезжая из города на дачу с постоянной скоростью 72км/ч, посмотрел на часы в 20:19. В тот же день, когда он приехал на дачу, часы показали такой же набор цифр в некотором другом порядке. Сколько километров расстояние от города до его дачи?

Решение:

В этот день такие же цифры на часах появятся только, когда время будет 21:09. Пройдёт 50 мин. или 5/6 часа. Умножаем скорость на время, получаем 60км.

94. У Кати в журнале по математике стоят 4 оценки. Средняя арифметическая оценка равняется 3,25. Четвёрка за четверть будет выставлена, если средняя арифметическая оценка будет хотя бы 3,5. Сможет ли Катя поучить 4 за четверть, если заработает ещё две четвёрки?

Решение:

Сумма баллов равна произведению среднего арифметического на количество оценок. Значит, у Кати всего $3{,}25 \cdot 4 = 13$ баллов. Если она заработает ещё две четвёрки, то сумма баллов будет 13+4+4=21, а количество оценок равно 6. Узнаём новую среднюю арифметическую оценку: 21:6 = 4,5. Ответ: сможет.

95. На доске написано число 2. За один ход можно либо удвоить число, либо стереть последнюю цифру. Можно ли через несколько ходов получить число 50?

Решение:

Приведём последовательность 2—4—8—16—32—64—128—256—25—50

96. Коля обменивался наклейками. Одну наклейку он меняет на 5 других. Вначале у него была 1 наклейка. Сколько наклеек у него будет после 50 обменов?

Решение:

Каждый раз он отдаёт одну наклейку и получает 5, то есть число его наклеек увеличивается на 4 после каждого обмена. Через 50 обменов число наклеек увеличится на 200. Тогда у него будет 201 наклейка.

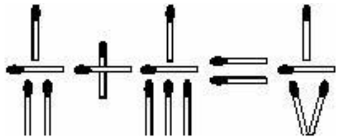
Тема 12. Повторение изученного материала.

97. Существует ли дробь, равная $\frac{7}{13}$, у которой разность числителя и знаменателя равна 24?

Решение:

Существует: $\frac{7}{13} = \frac{28}{52}$. Заметим, что 52 – 28 = 24. Ответ: да

98. Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.



Решение:

Спичку от плюса переложим к пятёрке, получим: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

99. Расшифруйте ребус: ПЧЁЛКА · 7 = ЖЖЖЖЖЖ

Решение:

Любое число, которое состоит из 6 одинаковых цифр, будет делиться на 7 по признаку делимости на 7, т.к. ЖЖЖ – ЖЖЖ = 0. Остаётся выбрать такую цифру Ж, чтобы число «ПЧЁЛКА» состояло из 6 разных цифр. Пример может быть такой: 142857·7 = 999999.

100. Есть двое песочных часов: на 7 мин и на 11 мин. Лечебная ванна длится 26 мин. Как с помощью этих часов отмерить нужное время?

Решение:

Поставим одновременно двое часов. Когда часы на 7 минут закончатся, начнём процедуру. В больших часах осталось 4 минуты, после чего их ещё два раза надо перевернуть, дожидаясь до конца. Получается 4+11+11 = 26 минут.

101. За какое наименьшее число взвешиваний можно найти фальшивую (более тяжёлую монету) из 20 монет одинаковых на вид?

Решение:

Делим на 4 кучки по 5 монет. Две из них взвешиваем: если повезёт, то более тяжёлую кучу делим на 2,2,1 и кладем кучки по 2 монеты на весы: если они равны, то 1 – фальшивка, если нет, то более тяжёлую кучу разбиваем на 1,1 и третий раз взвешиваем. Ответ – за 3 взвешивания.

102. Семь футбольных команд играли турнир: каждая с каждой. За победу дают 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. Команды расположились в турнирной таблице, набрав 14, 13, 9, 8, 7, 4, 3 очка. Сколько было сыграно ничьих?

Решение:

Общее количество матчей, которые состоялись равно 7 · 6 : 2 = 21 матч. Предположим, что ничьих не было, тогда 21 раз какая-то команда набирала бы 3 очка, и общее количество очков составило бы 63. Вычислим общее количество очков в турнирной таблице 14+13+9+8+7+4+3=58. Разница в 5 очков говорит о том, что 5 матчей было сыграно вничью, т.к. ничья приносит в сумме на две команды на 1 очко меньше, чем победа. Ответ: 5 ничьих.

103. Три подруги вышли в белом, зеленом и синем платьях. Их туфли тоже были белого, зеленого и синего цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадали. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми, Наташа была в зеленых туфлях. Определить цвет платья и туфель каждой из подруг.

Решение:

		БЕЛЫЙ	ЗЕЛЁНЫЙ	СИНИЙ
АНЯ	ТУФЛИ	+	–	–
	ПЛАТЬЕ	+	–	–
ВАЛЯ	ТУФЛИ	–	–	+
	ПЛАТЬЕ	–	+	–
НАТАША	ТУФЛИ	–	+	–
	ПЛАТЬЕ	–	–	+

Аня – белые туфли и белое платье, Валя – синие туфли и зелёное платье, Наташа – зеленые туфли и синее платье.

104. Директор фирмы заметил закономерность между буквами фамилий и числами в номерах телефонов его сотрудников. Вот некоторые фамилии и номера: «Ачинский-8111, Бутенко-7216 , Галич-5425, Лапина-6131». Какой номер у сотрудника с фамилией Огнев?

Решение:

Заметим, что первая цифра – это количество букв в фамилии. Вторая цифра (или группа из двух цифр) – порядковый номер в алфавите для первой буквы фамилии. Последняя цифра (или группа из двух цифр) – порядковый номер в алфавите для последней буквы фамилии. Ответ: Огнев-5163.

105. Света решала пример: $2019 \cdot 2018 \cdot 2017 - 2016 \cdot 2015 \cdot 2014$. Найдите последнюю цифру числа, которое у неё получилось.

Решение:

Последняя цифра произведения чисел совпадает с последней цифрой произведения их последних цифр. Достаточно вычислить: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ – оканчивается на 4. И вычислить $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ – оканчивается на 0. Тогда их разность будет оканчиваться на 4 – 0 = 4. Ответ: 4.

Тема 13. Элементы комбинаторики в задачах.

106. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых меньше 4?

Решение:

Используем организованный перебор вариантов. Для этого будем выписывать числа в порядке возрастания: 1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1020, 1100, 1101, 1110, 1200, 2000, 2001, 2010, 2100, 3000. Ответ: 15 чисел.

107. Дан квадрат со стороной 3 клетки. Сколькими способами можно раскрасить в нём три клетки так, чтобы они не имели общих сторон? Варианты, полученные переворотом, считаются одинаковыми.

Решение:

Используем организованный перебор вариантов. Пронумеруем клетки квадрата числами от 1 до 9, слева направо, сверху вниз. Выпишем подходящие варианты. 135, 137, 138, 139, 159, 168. Ответ: 6 способов.

108. Чтобы выбрать капитана команды и его заместителя, 10 ребят написали на бумажках свои имена и положили в шапку. Первое извлеченное имя – капитан, второе – заместитель. Сколькими способами можно их выбрать?

Решение:

Используем правило произведения. Капитана можно выбрать 10 способами, а после этого заместителя можно выбрать 9 способами. Получаем $9 \cdot 10 = 90$ способов.

109. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых различны и чётны?

Решение:

Используем правило произведения. Первую цифру можно выбрать из множества$\{2;4;6;8\}$ – четырьмя способами, т.к. 0 – нельзя ставить на первое место. Для второй цифры будет так же четыре способа, т.к. 0 уже можно использовать, а для третьей – только три. Получаем $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ чисел.

110. На шахматный турнир пришли 12 пятиклассников. Каждый из них сыграл с каждым. Сколько всего игр было сыграно?

Решение:

Каждый из 12 ребят сыграет с 11 соперниками. Получаем $12 \cdot 11 = 132$. Но когда два человека играют – происходит одна игра. Другими словами, игр вдвое меньше. Получаем 132 : 2 = 66 игр.

111. На прямой поставили шесть точек A, B, C, D, E, F. Сколько при этом получилось пар различных отрезков, которые не накладываются и не совпадают даже концами?

Решение:

Перечислим их: AB и CD, AB и DE, AB и EF, AB и CE, AB и DE, AB и CF, BC и DE, BC и EF, BC и DF, CD и EF, DE и AC, EF и AC, EF и BD, EF и AD, AC и DF. Ответ 15 пар отрезков.

112. Все друзья пожали друг другу руку, при этом произошло 21 рукопожатие. Сколько друзей в этой компании?

Решение:

Пусть x – число друзей, x – натуральное. Каждый из них поздоровался $(x - 1)$ раз. Когда здороваются два человека, происходит одно рукопожатие. Составим уравнение: $x(x-1) = 21 \cdot 2$. Оно имеет решение $x = 7$. Ответ: 7 друзей.

113. Окружность имеет диаметр 5см. На окружности поставили 8 точек. Каждую точку соединили отрезком с четырьмя другими. Докажите, что сумма длин всех отрезков не больше 80см.

Доказательство:

Чтобы соединить две точки нужен 1 отрезок. Всего проведено $8 \cdot 4 : 2 = 16$ отрезков. В худшем случае все они проходят через центр окружности (являются диаметрами), тогда сумма их длин $16 \cdot 5 = 80$см. В остальных случаях их сумма будет меньше 80см, что и требовалось доказать.

114. Сколько различных решений в натуральных числах имеет уравнение $2x + 5y = 90000$?

Решение:

Число x должно делиться на 5, а число y должно делиться на 2. Значит, можно представить их так: $x = 5a,\ \ y = 2b$. После подстановки в уравнение получаем: $10a + 10b = 90000$. Поделим на 10: $a + b = 9000$. Для такого уравнения найдутся 8999 решений: (1;8999), (2; 8998) … (8999;1). Значит, исходное уравнение имеет 8999 решений.

115. Каких прямоугольников с целочисленными сторонами больше: у которых площадь 2020см.кв. или у которых 2021см.кв?

Решение:

Разложим на множители 2020=1*2*2*5*101 и 2021=1*43*47. Комбинаций сторон для прямоугольников с площадью 2021 всего две: 43см и 47см или 2021см и 1см. Для прямоугольников с площадью 2020см.кв. комбинаций намного больше: 101см и 20см; 505см и 4см; 1010см и 2см; 2020см и 1см; и другие. Поэтому прямоугольников с площадью 2020см.кв. больше.

Тема 14. Задачи на проценты.

116. Рядовой Петров взял ведро нечищеной картошки и за 1 час её почистил. При этом 25% картошки ушло в очистки. За какое время у него набралось полведра очищенной картошки?

Решение:

За 1 час у него было картошки 75% от ведра. За 20 минут – 25%. Половина ведра – это 50%, или два раза по 25%. Получаем $20\text{мин} \cdot 2 = 40\text{мин}$. Ответ: за 40мин.

117. Алик, Боря и Вася собирали грибы. Боря собрал грибов на 20% больше, чем Алик, но на 20% меньше, чем Вася. На сколько процентов больше Алика собрал грибов Вася?

Решение:

Примем за 100% грибы, собранные Аликом. Тогда Боря собрал 120% того, что собрал Алик. Эти 120% равны 80% того, что собрал Вася. Тогда Вася собрал $120 \cdot 100 : 80 = 150\%$. Найдём разницу с Аликом: $150\% - 100\%$ = 50%. Ответ: на 50%.

118. Три пирата делили мешок монет. Первый забрал 3/7 всех монет, второй — 51% остатка, после чего третьему осталось на 8 монет меньше, чем получил второй. Сколько монет было в мешке?

Решение:

Всего монет x. После того, как первый заберёт монеты, их останется $\frac{4}{7}x$. Если второй заберёт 51% или $\frac{51}{100} \cdot \frac{4}{7}x = \frac{204}{700}x$, то останется 49% или $\frac{49}{100} \cdot \frac{4}{7}x = \frac{196}{700}x$. Приравняем выражения: $\frac{204}{700}x - 8 = \frac{196}{700}x$. Откуда $x = 700$. Ответ: 700 монет.

119. У бабушки в саду созрели яблоки: антоновка, грушовка и белый налив. Если бы антоновки было втрое больше, то суммарное количество яблок выросло бы на 70%. Если бы втрое больше было грушовки, то оно выросло бы на 50%. На сколько процентов изменилось бы суммарное количество яблок, если бы втрое больше было белого налива?

Решение:

Пусть А – количество антоновки, Г – грушовки, Б – белого налива. Увеличить число в 3 раза – то же самое, что прибавить к нему 2 таких же числа. Значит 2А = 70%, А = 35%. Аналогично 2Г = 50%, Г = 25%. Тогда Б = 100% – 35% – 25% = 40%. Увеличение на 2Б даст прирост 80%. Ответ: на 80%.

120. Цифры двузначного числа поменяли местами, и при этом оно увеличилось на 75%. Сколько существует таких чисел?

Решение:

Рассмотрим числа $X = \overline{ab} = 10a + b$ и $Y = \overline{ba} = 10b + a$. Число вырастет на 75% или составит $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ от исходного числа, значит $7X = 4Y$. Возвращаясь к начальным условиям: $7(10a + b) = 4(10b + a)$, откуда $66a = 33b$ или $2a = b$. Так как a, b – цифры, то есть 4 решения (1;2), (2;4), (3;6), (4;8). Получается, что исходными числами могли быть 12, 24, 36, 48. Ответ: 4 числа.

121. Одно число увеличили на 2%, а другое — на 3%. Могла ли сумма увеличиться на 5%? (Числа считаются положительными.)

Решение:

Исходные числа x, y, тогда после увеличения их сумма будет $1{,}02x + 1{,}03y$. Если эта сумма на 5% больше исходной суммы, $1{,}05(x + y) = 1{,}02x + 1{,}03y$, откуда $0{,}03x + 0{,}02y = 0$, но это невозможно, т.к. сумма положительных чисел не может равняться нулю. Ответ: нет.

122. За два года завод снизил объём выпускаемой продукции на 51%. При этом каждый год объём выпускаемой продукции снижался на одно и то же число процентов. На сколько?

Решение:

Оставшийся объём 49%. Выразим коэффициентом p число раз, в которое происходило ежегодное понижение объёма выпуска, первоначальный объём примем за единицу. Тогда $1 \cdot p \cdot p = 0{,}49$. Откуда понимаем, что $p = 0{,}7$. То есть, каждый год снижение происходило на 0,3 или 30%. Ответ: на 30%.

123. В классе учится больше 19 человек, но меньше 29 человек. В олимпиаде по математике приняли участие 16% учеников. Сколько учеников в этом классе?

Решение:

Так как мы имеем целое число процентов – 16%, то на одного ученика приходится так же целое число процентов. Такое возможно только в двух случаях. 1) если учеников 20, то 1 ученик = 5%; 2) если учеников 25, то 1 ученик = 4%. Поскольку 16 делится на 4, то подходит второй вариант. Ответ: 25.

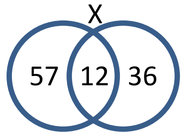
124. В автобусе ехало меньше 100 человек, сидячих пассажиров было вдвое больше, чем стоячих. На остановке 4% пассажиров вышли. Сколько пассажиров осталось в автобусе?

Решение:

Так как сидячих пассажиров вдвое больше стоячих, то общее число пассажиров делится на 3. Так как 4% - это 1/25 часть, то число пассажиров делится на 25. Одновременно на 3 и на 25 делится только 75. Поэтому общее число пассажиров – 75, вышли 3 человека, осталось 72. Ответ: 72.

Тема 15. Диаграмма Эйлера-Венна.

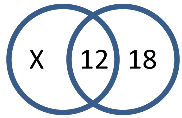
125. В кондитерском отделе посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Что бы найти число всех покупателей, вычислим 57 + 36 – 12 = 81. Ответ: 81 покупатель.

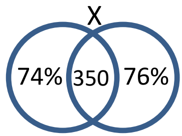
126. В классе учится 25 учащихся. Несколько из них ходили в кино, 18 человек ходили в театр, причём и в кино, и в театр ходили 12 человек. Известно, что трое не ходили ни в кино, ни в театр. Сколько человек из класса ходили в кино?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Обозначим за X число тех, кто ходил только в кино. Тогда X + 18 – 12 = 25 – 3. Получаем X = 16. Ответ: 16 человек.

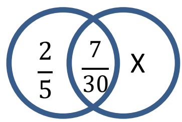
127. Ровно 74% учащихся школы учат английский язык, 76% учат немецкий. Сколько учеников в этой школе, если 350 из них изучают оба языка?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Общее число учеников соответствует 100%. Значит 74% + 76% – 100% = 50% - приходится на долю тех, кто учит оба языка. Если 350 учеников – это 50%, то 700 учеников – 100%. Ответ: 700 учеников.

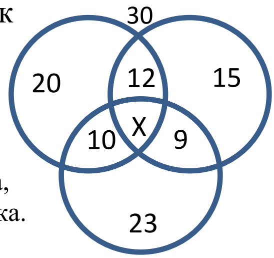
128. Вовочка ехал в поезде. Ровно $\frac{2}{5}$ всего пути он слушал музыку, какую то часть всего пути он читал книгу. Ровно 14 минут он читал книгу, слушая музыку, что составило $\frac{7}{30}$ от всего пути. Сколько минут он читал книгу, не слушая музыку?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Примем весь путь за единицу, время которое он слушал только музыку за X. Тогда $\frac{2}{5} + X - 1 = \frac{7}{30}$, откуда $X = \frac{5}{6}$. Если 14 минут равны $\frac{7}{30}$ от всего пути, то весь путь длился $14 : \frac{7}{30} = 60$мин. Найдём $\frac{5}{6}$ от 60 минут – это 50минут. Ответ: 50мин.

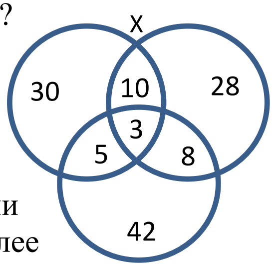
129. В фирме работают 30 человек. Чтобы доехать до работы 20 из них каждый день пользуются метро, 15 – автобусом, 23 – троллейбусом, 10 – и метро, и троллейбусом, 12 – и метро, и автобусом, 9 – и троллейбусом, и автобусом. Сколько человек ежедневно пользуется всеми тремя видами транспорта?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Чтобы найти число людей, которые пользуются всеми видами транспорта, вычислим 30 – (20+15+23 – 12 – 10 – 9) = 3. Ответ: 3 человека.

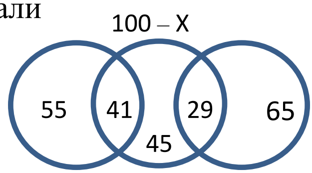
130.В пионерском лагере отдыхали: 30 отличников, 28 победителей олимпиад и 42 спортсмена. 10 человек были и отличниками и олимпиадниками, 5 отличниками и спортсменами, 8 спортсмена ми и олимпиадниками, 3 и отличники, и спортсмены, и олимпиадники. Сколько ребят отдыхало в лагере?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Чтобы найти общее число ребят, отдыхающих в лагере, вычислим 3 + (30 + 28 + 42 – 10 – 8 – 5) = 80. Ответ: 80 человек.

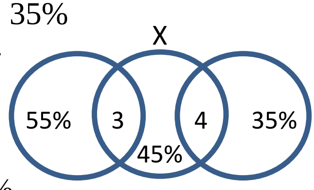
131. В опросе участвовало 100 человек. Они отвечали на вопрос: «Какой фрукт вы считаете наиболее полезным?». 65 выбрали яблоко, 45 человек назвали лимон, 55 человек назвали банан, 41 человек назвал и банан и лимон, 29 человек назвали и яблоко и лимон. Несколько человек затруднились с ответом. Сколько человек не дали ответа?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. Обозначим за X число тех, кто затруднился с ответом. Тогда 65 + 55 + 45 – 41 – 29 = 100 – X. Откуда X = 5. Ответ: 5 человек.

132. На контрольной было 3 задачи. В 6а классе никто не решил все задачи. 55% решили №1; 45% решили №2; 35% решили №3; 3 ученика решили №1 и №2; 4 ученика решили №2 и №3. Сколько учеников в 6а?



Решение:

Используем диаграмму Эйлера-Венна. 55% + 45% + 35% –100% = 35% - тех, кто решил две задачи, и это 3+4=7 человек. Тогда всего 20 учеников. Ответ: 20 учеников.

Тема 16. Рациональные числа и действия с ними.

133. В выражении $0{,}3 : 0{,}6 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 - 0{,}9 = 0{,}12$ расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство.

Решение:

Достаточно привести пример $(0{,}3 : 0{,}6 - 0{,}8) \cdot (0{,}5 - 0{,}9) = 0{,}12$

134. В равенстве $1 - 2 - 4 - 8 - 16 = 19$ поставьте несколько знаков модуля так, чтобы оно стало верным.

Решение:

Достаточно привести пример $\big||1 - 2| - |4 - 8| - 16\big| = 19$

135. Петя ошибся, записывая десятичную дробь: цифры записал верно, а запятую сдвинул на одну позицию. В результате получилось число, которое меньше нужного на 19,71. Какое число должен был записать Петя?

Решение:

Пусть нужное число равно $10x$, при перенесении запятой получилось число x. Тогда их разница $9x = 19{,}71$. Откуда $x = 2{,}19$, тогда исходное число было 21,9.

136. Директор школы загадывает три двухзначных числа A, B, C. Учитель математики должен назвать три числа X, Y, Z, после чего директор сообщит ему результат $A \cdot X + B \cdot Y + C \cdot Z$. Если учитель математики отгадает числа A, B, C, то он останется работать, если нет, то его уволят! Помогите учителю!

Решение:

Отгадать получится, например, если назвать $A = 10000$, $B = 100$, $C = 1$. Пусть директор загадает любые числа $X = \overline{ab}$, $Y = \overline{cd}$, $Z = \overline{ef}$, тогда результат вычислений $AX + BY + CZ$ примет вид шестизначного числа $\overline{abcdef}$, по которому легко определяются числа директора X, Y, Z.

137. Назовём число «особенным», если сумма его цифр и их произведение совпадают. Например, 123, в нём $1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Существует ли девятизначное «особенное» число?

Решение:

Существует, например: 111111135. Сумма и произведение цифр равны 15.

138. На доске было написано двузначное число. Саша переставил цифры, и полученное число увеличилось в 4,5 раза. Какое двузначное число могло быть записано первоначально?

Решение:

Исходное число запишем, как $\overline{ab} = 10a + b$, полученное число $\overline{ba} = 10b + a$. Составим уравнение по условию: $4{,}5(10a + b) = 10b + a$, откуда путём преобразований получаем $8a = b$. Такое возможно при $a = 1, b = 8$. Ответ: 18.

139. Сейчас Коле 11 лет, а Пете 1 год. День рождения они отмечают в один день. Сколько лет будет Коле и Пете, когда Коля будет в 1,4 раза старше Пети?

Решение:

Пусть пройдёт x лет. Тогда Коле будет $11+ x$, а Пете будет $1 + x$, и выполняется равенство: $1{,}4(1 + x) = 11 + x$. После преобразований получаем $x = 24$. Ответ: Коле будет 35 лет, Пете будет 25 лет.

140. Сравнить числа: $\frac{2018}{2019}$ и $\frac{2019}{2020}$

Решение:

Сравнение не изменится, если воспользоваться правилом перекрестного умножения. Сравним $2018 \cdot 2020$ и $2019 \cdot 2019$. Перепишем в другом виде: $(2019 - 1)(2019 + 1)$ и 2019^2. Пользуясь формулой разности квадратов, перепишем так: $2019^2 - 1$ и 2019^2. В таком виде понятно, что левая часть меньше. Ответ: $\frac{2018}{2019} < \frac{2019}{2020}$

141. По углам квадратного бассейна растут четыре пальмы (по одной на каждом углу). Владелец бассейна решил увеличить его площадь в два раза, но пальмы вырубать ему жалко. Каким образом он может увеличить площадь бассейна вдвое, при том, что сам бассейн должен оставаться квадратным?

Решение:

Этого можно добиться так. Разрезаем квадрат по диагоналям на 4 равных треугольника. Аналогичные треугольники пририсовываем с каждой из 4 сторон квадрата, как показано на рисунке. Полученная фигура имеет площадь вдвое больше начальной. А пальмы, которые стояли по углам – останутся на своём месте.

Тема 17. Повторение изученного материала.

142. Докажите, что число $2020^{2222} + 2222^{2020}$ делится на 101.

Доказательство:

Первое слагаемое делится на 101, т.к. 2020 делится на 101. Второе слагаемое так же делится на 101, т.к. 2222 делится на 101. Значит, их сумма будет делиться на 101. Что и требовалось доказать.

143. Запишите семь последовательных натуральных чисел таких, что в их записи цифра «2» встретится ровно 16 раз. (последовательные числа отличаются на 1)

Решение:

Достаточно привести пример: 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221

144. Разгадайте ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

```
 КОШКА
+КОШКА
 КОШКА
------
СОБАКА
```

Решение:

При сложении трёх А мы увидели снова А, тогда А=0. В отличие от А буква К не может быть 0, т.к. она ещё и первая цифра. Тогда подходит К=5. При сложении трёх Ш (и запомненной единицы) получается 0, если Ш=3. Если О=6, то Б=9 (1 запоминаем), тогда К+К+К = 15+1=16. С=1. Получаем полную расшифровку 56350+56350+56350 = 169050.

145. Можно ли к двузначному числу справа приписать цифру 8 так, чтобы оно увеличилось в 11 раз?

Решение:

Обозначим двузначное число $\overline{AB} = 10A + B$, а полученное трёхзначное число будет иметь вид: $\overline{AB8} = 100A + 10B + 8$. Составим уравнение по условию задачи: $11(10A + B) = 100A + 10B + 8$, откуда 10A + B = 8. Но это не возможно, т.к. при любой цифре A≠ 0 выражение (10A + B) будет больше 8. Ответ: нельзя.

146. Чёрт предложил сделку Бездельнику. Каждый раз, когда Бездельник переходит мост через речку, количество имеющихся у него денег удваивается. Но за это он отдаёт Чёрту каждый раз по 24 копейки. Однако он прошёл по мосту 3 раза и деньги у него закончились. Сколько денег у него было в начале?

Решение:

Решаем задачу обратным ходом. (0+24):2 = 12копеек – до третьего перехода; (12+24):2 = 18копеек до второго перехода; (18+24):2 = 21копейка до первого перехода. Ответ 21 копейка.

147. Перед нами трое людей А, В и С. Один из них правдивец и всегда говорит правду, другой лжец и всегда лжёт, третий – обычный человек, который может говорить правду или лгать. Эти люди высказывают следующие утверждения. А: Я нормальный человек. В: Это правда. С: Я не обычный человек. Кто такие А, В и С?

Решение:

Решаем задачу обратным ходом. (0+24):2 = 12копеек – до третьего перехода; (12+24):2 = 18копеек до второго перехода; (18+24):2 = 21копейка до первого перехода. Ответ 21 копейка.

148. Можно ли число 203 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма этих чисел так же была равна 203?

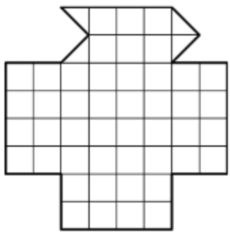
Решение:

Разложим на множители число 203 = $7 \cdot 29$, решить задачу помогает единица. Так $7 + 29 + (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - 167\text{раз} = 7 \cdot 29 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1) - 167\text{раз}$.

149. Четыре утёнка и пять гусят весят 4 килограмма 100 грамм, а пять утят и четыре гусенка весят 4 килограмма. Сколько весит 1 утенок?

Решение:

Пусть x – вес утёнка, y – вес гусёнка. Имеем два уравнения: $4x + 5y = 4{,}1$ и $5x + 4y = 4$. Найдём разность этих уравнений $y - x = 0{,}1$. Найдём сумму этих уравнений и разделим её на 9, получим $y + x = 0{,}9$. Из двух полученных уравнений легко находим $x = 0{,}4$; $y = 0{,}5$. Ответ: 400г.

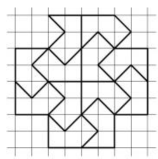


150. Можно ли разрезать данную фигуру а) на 11 равных частей?; б) на 12 равных частей? (разрезы можно делать по линиям клеток и по их диагоналям)

Решение:

а) Площадь данной фигуры равна 48 клеткам. Но 48 не делится на 11, и не даёт результата с половинкой клетки, поэтому разрезать на 11 равных частей нельзя;

б) Если площадь фигуры 48 клеток, то можно разделить её на 12, тогда каждая часть будет иметь площадь 4 клетки. Покажем как:



151. Проведите шесть прямых и отметьте на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно четыре точки.

Решение:

Приведём пример расположения прямых на рисунке.