ГЕОМЕТРИЯ

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

ЮШИН-РУСАНОВ Д.С.

10-11

СОДЕРЖАНИЕ

ОБ УЧЕБНИКЕ

Данный учебник предназначен для изучения геометрии на базовом и профильном уровне. Он включает в себя как основные темы школьного курса, так и дополняющие его и расширяющие параграфы. Учебник содержит лаконичный теоретический материал, больше ориентирован на практику, на приобретение опыта при решении задач. Используется не столько строгий аксиоматический подход, сколько интуитивное понимание фактов, геометрических конструкций и их свойств. Допускается раннее знакомство со стандартными многогранниками, где параллельность и перпендикулярность некоторых элементов идёт на уровне определения и принимается без доказательств. Это позволяет на раннем этапе прорабатывать задачи, используя простейшие многогранники, учиться видеть их свойства, корректно изображать фигуры.

Учебник содержит задачи разного уровня сложности: от базового до повышенного, что позволяет применять на уроках дифференцированный подход к обучению. Так же в нём содержится большое количество задач на готовых чертежах. Это существенно ускоряет темп урока, поскольку многие опорные задания решаются быстрее, если чертёж уже готов. Постоянный визуальный контакт с изображёнными фигурами даёт учащимся возможность видеть, как и с какого ракурса им будет удобно изображать фигуры в других задачах и условиях, решает проблему затруднения при построении чертежей. Отличительной особенностью учебника является наличие большого числа практико-ориентированных задач. Это способствует повышению мотивации к изучению тем, показывает связь геометрии с различными сферами реальной жизни. Подход к формулировкам заданий в большинстве случаев схож с подходом к их формулированию на экзамене. Это является очевидным преимуществом, поскольку учащиеся на экзамене будут видеть привычный для них тип вопросов, заранее понимать требования к оформлению решения.

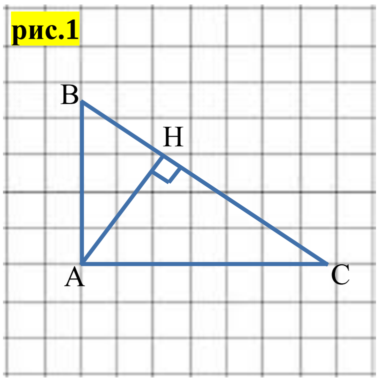
Отличным дополнением к каждой теме является проработка теории, представленная в виде заданий на анализ истинности утверждений, а также в виде тематических кроссвордов. Учебник разделён на главы, в конце каждой главы идёт параграф на закрепление изученного материала, где собраны задачи на повторение, они решаются с использованием комбинации полученных умений, В конце учебника можно найти дополнительный справочный материал. Впервые вводятся такие дополнительные параграфы и отдельные задания, которые показывают связь геометрии с другими разделами математики и смежными науками: теорией вероятности, математическим анализом, экономикой, физикой, астрономией. Всё это помогает сформировать целостную картину науки, разнообразие и единство её направлений. Существенным достижением стало введение планиметрических задач в курс геометрии. Планиметрия изучается как отдельной главой, так и в рамках других глав.

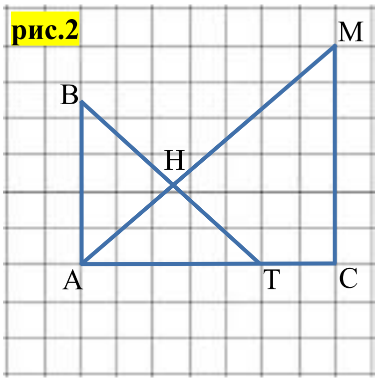
Учебник подходит для классов, где в программе на геометрию выделяется 2 или 3 урока в неделю. Первые три главы отводятся для изучения в 10 классе, последние три главы – для изучения в 11 классе. Каждая тема в содержании сразу разбита на отдельные 3-5 уроков, после которых приводится домашнее задание. Как правило, первый урок содержит необходимую теорию и наиболее простые задачи для её проработки. Последующие уроки содержат практику для закрепления изученного материала. Такой подход помогает педагогу экономить время на планировании занятий. При двух часах в неделю и базовом уровне изучения предмета разбиение на отдельные уроки полностью покрывает рабочую программу, но разбор некоторых сложных задач придётся опустить. При трёх уроках в неделю и углубленном изучении предмета педагог может смело разбирать все предложенные задачи, а ещё он имеет возможность проводить отдельные уроки для контроля знаний после каждой темы.

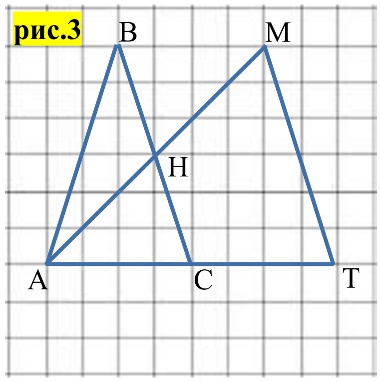
Желаем вам эффективного и увлекательного обучения!!!

Тема 1.1 Доказательство геометрических фактов. Отношения между углами

Наша первая учебная задача – повторение курса планиметрии. В этой главе мы будем учиться доказывать геометрические факты, вспомним и докажем некоторые классические теоремы. Узнаем, какие из них можно в дальнейшем использовать без доказательств. Самое простое, с чего мы начнём – вспомним истину: сумма углов треугольника равна 180°. Если в задаче требуется доказать равенство углов или другое соотношение между углами, то, скорее всего, вы можете применить метод введения неизвестного. Обозначив один из углов за α, надо поэтапно выразить все остальные углы. Так мы придём ко второму, интересующему нас углу, и увидим в каком соотношении он находится с исходным углом α.







№1. В треугольнике ABC угол A= 90°, проведена высота AH. Докажите, что $\angle ABC = \angle CAH$.
Приведём доказательство:
Пусть $\angle ABC = \alpha$, так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle ACB = 90 - \alpha$. Треугольник AHC прямоугольный, тогда $\angle CAH = 90 - (90 - \alpha) = \alpha$. Поскольку оба угла $\angle ABC$ и $\angle CAH$ равны α, то $\angle ABC = \angle CAH$, ч.т.д.

№2. На рисунке 2 треугольники ABT и ACM – прямоугольные, и AH=HT. Докажите, что $\angle ABT = \angle AMC$.

№3. На рисунке 3 изображена конструкция, в которой AB=BC, AH – медиана, AH=HM, AC=CT. Докажите, что $\angle AMT = \angle ABC + \angle BAH$. Запомните такой приём – «удвоение медианы».

№4. В треугольнике ABC стороны AB=BC, BK – биссектриса внешнего угла при вершине B. Докажите, что прямые AC и BK параллельны.

№5. В треугольнике ABC AB=BC, AE – биссектриса ∠A. Докажите, что угол AEB в 3 раза больше угла CAE.

№6. В треугольнике ABC угол A – прямой, биссектрисы BK и CE пересекаются в точке O. Докажите, что ∠BOC =135°.

№7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что внешний угол при вершине A равен ∠AOC.

Домашнее задание

1. Дан ΔABC. Внешний угол при вершине C равен 141°, ∠ABC = 102°. Докажите, что AB=BC.

2. В треугольнике ABC сторону AC продлили за точку A на расстояние AE=AB. Через точку A параллельно BE провели прямую, пересекающую BC в точке K. Докажите, что AK – биссектриса ∠A.

Тема 1.2 Доказательство геометрических фактов. Подобие и его применение

Большую роль в геометрии играют признаки подобия треугольников. Доказательство их подобия может быть самостоятельной задачей, а может являться лишь шагом на пути к доказательству других фактов, следующих из подобия. Повторим признаки подобия:

1. **Если у треугольников есть равный угол, а две стороны, образующие этот угол у одного треугольника пропорциональны двум сторонам, образующим этот угол у другого треугольника, то треугольники подобны.**
2. **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то треугольники подобны.**
3. **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то треугольники подобны.**

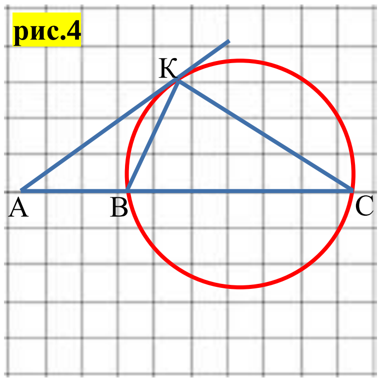
№1. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 7 и 28, BD = 14. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

№2. В квадрате ABCD точка M лежит на AB, точка K лежит на CD так, точка P лежит на AD так, что MC∥PK. Докажите, что треугольники MBC и PKD подобны.

№3. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, проведённой в точку касания, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой (далее без доказательств).

№4. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC описан окружностью. Из точки M, лежащей вне окружности проведены касательные в точки B и C. Докажите, что треугольники ABC и BCM подобны.

№5. Из точки A, лежащей вне окружности, к окружности проведена касательная в точку K и секущая, которая пересекает эту окружность сначала в точке B и вторично в точке C. Докажите, что треугольники AKC и AKB подобны.



Приведём доказательство:

Угол $\angle BCK$ опирается на $\cup$ BK и равен её половине, а $\angle AKB$ – угол между касательной и хордой, он так же равен половине $\cup$ BK. Поэтому $\angle BCK = \angle AKB$. Кроме того $\angle KAB$ – общий для данных треугольников. Следовательно, $\Delta AKC \sim \Delta AKB$, ч.т.д.

Дополнительно заметим, что из подобия этих треугольников следует, что: $AK : AC = AB : AK$. Откуда $AK^2 = AB \cdot AC$. Вывод: **Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезка секущей на её внешнюю часть** (далее используйте этот вывод без доказательств).

№6. Точки A, B, C, D последовательно расположены на окружности. Отрезки AC и BD пересекаются в точке E. Докажите, что $AE \cdot CE = BE \cdot DE$. Сделайте вывод (далее используйте его без доказательств).

Домашнее задание

1. Окружности с центрами O и Q не пересекаются. Прямая PK проходит между ними и касается первой окружности в точке P, второй – в точке K. Прямые PK и OQ пересекаются в точке M, причём OM : MQ = 1 : 3. Докажите, что диаметры окружностей тоже относятся как 1 : 3.

2. Дан прямоугольник ABCD и точка T на стороне BC такая, что $\angle BAT + \angle CDT = 90°$. Докажите, что ΔATD – прямоугольный.

Тема 1.3 Доказательство геометрических фактов. Закрепление изученного материала

Приёмы, с которыми мы работали на прошлых уроках, теперь закрепляем на дополнительной практике. Решите предложенные задачи. Пополните свой инструментарий ещё одним фактом из планиметрии, который будет доказан в задаче 2.

№1. В параллелограмме ABCD биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O. Докажите, что Δ AOB – прямоугольный.

№2. Из точки A к окружности проведены две секущие. Первая пересекает её в точках M и K, вторая – в точках P и E. Докажите, что $AK \cdot AM = AE \cdot AP$.

№3. ABCD – параллелограмм. Точка E лежит на BC так, что AE=EC. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник AED, лежит на отрезке AC.

№4. Дан треугольник ABC и точка P такая, что AP=BP=CP. Докажите, что $\angle APB$ в 2 раза больше $\angle ACB$.

№5. Дана окружность с центром A и радиусом 4 и окружность с центром B и радиусом 3. Меньшая окружность проходит через середину радиуса большей. Окружности пересекаются в точках P и K. Докажите, что $\angle PAB = \angle PKB$.

№6. В треугольнике ABC угол A – прямой. Биссектриса угла A пересекает описанную около треугольника окружность в точке E. Докажите, что BE=CE.

№7. В треугольнике CBT угол T – прямой, CT > BT, E – середина BC. Окружность проходит через точки T, B, E и пересекает CT в точке A. Докажите, что AC равен диаметру окружности.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC угол A=90°, AM – медиана. Докажите, что $\angle ABC$ в 2 раза меньше $\angle AMC$.

2. Точка A лежит на продолжении диаметра окружности BC за точку B на расстояние, равное радиусу. Прямая AK касается окружности в точке K. Докажите, что Δ AKB – равнобедренный.

Тема 2.1 Треугольники и окружности. Формулы площади треугольника

Большинство задач сводятся к исследованию свойств треугольника. В данной теме мы повторим факты и дополним наши знания. Площадь треугольника можно найти шестью разными способами, которые будут полезны при решении задач. (Есть и другие способы)

1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab.}$
2. Для треугольника со стороной a и высотой h, проведенной к ней, площадь: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ah.}$
3. Если треугольник правильный со стороной a, то формула площади: $\boldsymbol{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.}$
4. Когда определены стороны a, b и угол α между ними: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab \cdot sin(\alpha).}$
5. Формула Герона по сторонам: $\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, где $p -$ полупериметр.
6. Площадь через радиус вписанной окружности и полупериметр: $\boldsymbol{S = pr}$.

Кроме того, важно знать, как именно соотносятся площади подобных треугольников (и вообще подобных фигур). Если вы знаете коэффициент подобия, то:

Площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия. Если все стороны треугольника в 3 раза больше, то его площадь больше не в 3 раза, а уже в 9.

№1. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза $\sqrt{73}$, а катет 3.

№2. Площадь треугольника равна 24, а одна из сторон 4. Найти высоту, проведенную к ней.

№3. Найти площадь правильного треугольника, если его сторона 8.

№4. Найти площадь треугольника, у которого стороны 7 и $\sqrt{12}$, а угол между ними 60°.

№5. Найти площадь треугольника со сторонами 12, 35, 37.

№6. Найти площадь треугольника, если его периметр 28, а радиус вписанной окружности 3.

№7. Найдите радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник с катетами 9 и 40.

№8. Площадь треугольника равна 52. Средняя линия отсекла от него треугольник меньшего размера. Найдите площадь этого треугольника.

№9. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC лежат точки M и K, так, что MK∥AC и известно, что AM : MB = 2 : 1. Площадь треугольника MKB равна 5. Найти площадь трапеции AMKC.

№10. В треугольнике ABC точка M на стороне AB, причём AM : MB = 2 : 3. Точка K – середина стороны BC. Какую часть площадь треугольника MBK составляет от площади ABC?

Домашнее задание

1. Найти площадь треугольника, у которого стороны 9 и $\sqrt{8}$, а угол между ними 45°.

2. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 29, 29, 40.

3. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если все его стороны увеличить в 6 раз?

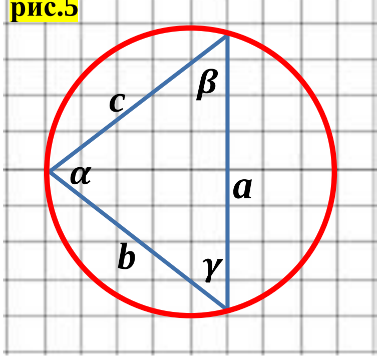
Тема 2.2 Треугольники и окружности. Важнейшие теоремы о сторонах треугольника

В прямоугольном треугольнике мы работаем с соотношениями. Синус – отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус – отношение прилежащего катета к гипотенузе, тангенс – отношение противолежащего катета к прилежащему. Связь сторон и углов любого треугольника показывает теорема синусов:

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, и пропорция эта равна двум радиусам описанной около треугольника окружности.

$$\boldsymbol{\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R}$$

рис.5



Заметим, что теорему синусов можно использовать в двух случаях – установить связь между сторонами и углами или связь стороны и радиуса описанной окружности. Задачи о радиусе описанной окружности, вероятно, связаны с теоремой синусов!

Кроме того, теорема косинусов тоже показывает связь между углами и сторонами треугольника:

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус их удвоенное произведение на косинус угла между ними.

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}$$

Частный случай теоремы косинусов при угле 90° − хорошо известная всем теорема Пифагора.

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Но не менее значимой является теорема, обратная к теореме Пифагора:

Если в треугольнике квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник – прямоугольный. Эту теорему можно использовать, чтоб доказать наличие в треугольнике прямого угла.

№1. В треугольнике ABC углы A и B равны $70°$ и $50°$, а сторона AB равна $5\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

№2. Дан треугольник ABC, AB=BC=5, AC= 8. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

№3. В треугольнике ABC проведена высота BH и биссектриса угла A, делящая эту высоту в соотношении 13:12, считая от вершины B. Известно, что BC=10. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

№4. Две стороны треугольника 8 и $3\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. Найдите его третью сторону.

№5. В треугольнике ABC известны стороны AC=5, BC= $4\sqrt{2}$, $\angle ABC = 45°$. Найти AB. Сколько решений имеет задача?

№6. Дан четырёхугольник ABCD, в котором AB=4, BC=5, CD=$\sqrt{12}$, AD=3, $\angle ABC = 60°$, Докажите, что $\angle ADC -$ прямой.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC AB=3, BC=8, $\angle ABC = 60°$. Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружностей для этого треугольника.

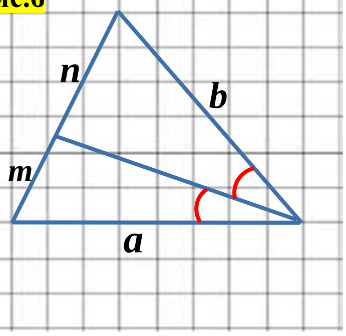
2. В треугольнике ABC угол B – прямой. Окружность касается сторон AB и BC в точках A и K, и пересекает сторону AC в точке P.
а) докажите, что $\angle BKA = \angle KPA$;
б) найдите радиус данной окружности, если AB=2.

Тема 2.3 Треугольники и окружности. Биссектриса и медиана

Биссектриса – луч, делящий угол пополам. В треугольнике можно провести три биссектрисы. Они пересекутся в одной точке, называемой *инцентром*, и эта точка – центр окружности, вписанной в треугольник. Сама по себе биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные сторонам угла, из которого она выходит: $\boldsymbol{a : b = m : n}$.

Длину отрезка биссектрисы в треугольнике находят по формуле: $\boldsymbol{l_c = \sqrt{ab - mn}}$, где $a, b -$ стороны угла; $m, n -$ отрезки, на которые биссектриса делит сторону c.

рис.6

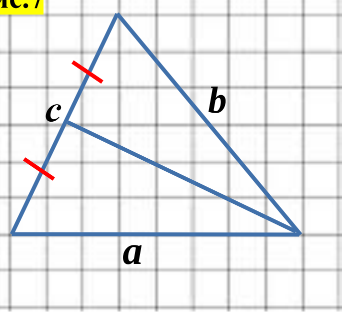


Медиана – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной ей стороны.

В треугольнике можно провести три медианы. Они пересекутся в одной точке, называемой *центроидом*, и эта точка делит медианы в соотношении 2:1, считая от вершин. Длину медианы в треугольнике можно найти по формуле: $\boldsymbol{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},}$ где c – это та сторона, к которой проведена медиана.

Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, будет равна её половине.

рис.7



№1. В треугольнике ABC AB=8, BC=9, CA=10. На какие отрезки поделит сторону BC биссектриса $\angle A$? Найдите длину биссектрисы.

№2. Катеты прямоугольного треугольника равны $\sqrt{11}$ и 5. Найдите длину медианы, проведённой к его гипотенузе.

№3. Найдите длину медианы, проведённой к боковой стороне равнобедренного треугольника со сторонами 20, 20, 32.

№4. В треугольнике ABC угол A – прямой. Окружность радиуса 3 вписана в этот треугольник и касается стороны BC в точке K так, что BK:KC=3:2. Найдите длину медианы, проведённой к BC.

№5. В треугольнике ABC $\angle BAC = 90°$. Биссектриса BE и медиана AK пересекаются в точке O.

а) докажите, что ∠AOE в 3 раза больше ∠ABE;
б) найдите расстояние от точки С до ЕК, если АВ=6, АС=8.

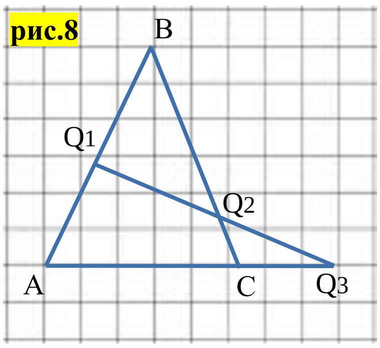
№6. В треугольнике ABC AB=BC, $\angle ABC = 120°$. Точка O – центр вписанной окружности. Прямая AO пересекает ВС в точке Е.
а) докажите, что радиус описанной окружности равен боковой стороне такого треугольника;
б) найдите отношение BE:EC.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC AB=8, BC=10, AC=12.
а) на какие отрезки биссектриса АЕ делит сторону ВС?;
б) найдите длину медианы АМ.

2. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, CA в точках K, P, T соответственно, $\angle ACB = \angle KTP$.
а) докажите, что треугольник ABC – равнобедренный;
б) пусть AK=3, KB=2, найдите площадь фигуры AKPC.

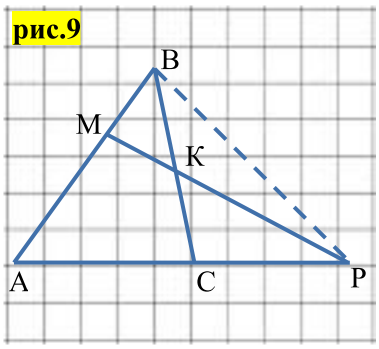
Тема 2.4 Треугольники и окружности. Теорема Менелая



Ещё рассмотрим теорему Менелая. Она применяется в специальной конструкции, когда имеется луч, пересекающий две стороны треугольника и продолжение третьей.

$$\frac{AQ_1}{Q_1B} \cdot \frac{BQ_2}{Q_2C} \cdot \frac{CQ_3}{Q_3A} = 1$$

На первый взгляд это совершенно искусственная конструкция, которая похожа на самолётик. Может показаться, что такие конструкции встречались вам не часто. Однако, это одна из важнейших в будущем для нас теорем. Она помогает решать задачи как на плоскости, так и в пространстве. Многие сложные задачи без неё вовсе не решить.



№1. В треугольнике ABC точка M делит сторону AB в соотношении 2:1, считая от A, точка K – середина стороны BC. Прямые MK и AC пересекаются в точке P.
а) докажите, что AC=CP;
б) найдите AP, если известны стороны AB=3, BC=2,5, BP=4.
Приведём решение:
а) Пусть $AM = 2x$, $MB = x$, $BK = KC = y$. По теореме Менелая: $\frac{2x}{x} \cdot \frac{y}{y} \cdot \frac{CP}{AC + CP} = 1$, откуда $\frac{CP}{AC + CP} = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow AC = CP$, ч.т.д.
б) проведём BP, тогда в Δ ABP отрезок BC – медиана. По формуле медианы: $BC = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AP^2} \Leftrightarrow 6{,}25 = \frac{1}{2}\sqrt{50 - AP^2} \Leftrightarrow$ AP=5.

№2. Треугольник ABC имеет стороны AB=BC=10, AC=12. Точка M – середина AB, точка K лежит на стороне BC так, что BK=4. Прямая MK пересекает продолжение стороны AC в точке E. Найдите отрезок CE.

№3. В квадрате ABCD точка пересечения диагоналей O, точка K лежит на стороне AB так, что AK : KB = 1 : 3. Прямые AD и OK пересекаются в точке P. Найдите отношение PA : AD.

№4. В равностороннем треугольнике ABC точка K лежит на стороне AB так, что AK : KB = 4. Точка P лежит на стороне BC так, что BP : PC = 2. Прямая KP пересекает прямую AC в точке M. Найдите отношение CM : CA.

№5. Две медианы треугольника пересекают друг друга. Докажите с помощью теоремы Менелая, что они делят друг друга в соотношении 2:1, считая от вершины треугольника.

№6. Треугольник ABC с прямым углом C имеет угол ∠ABC=30°. Точка E лежит на BC так, что AC=BE, точка K лежит вне треугольника ABC так, что EK=BC и EK⊥BC.
а) докажите, что ∠EKA в 4 раза меньше угла ∠KBE;
б) найдите радиус окружности, описанной около Δ ABK, если BE=6.

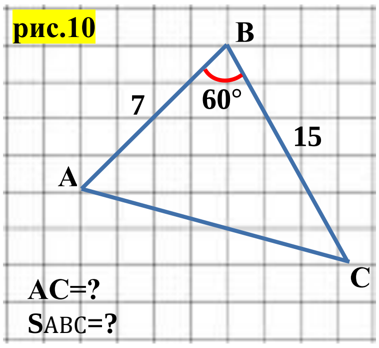
Домашнее задание

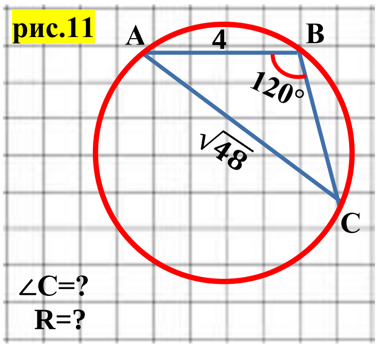
1. В треугольнике ABC AB=BC. Высоты AH и BM пересекаются в точке O, причём OB : OM =5. Найдите отношение CH : BH.

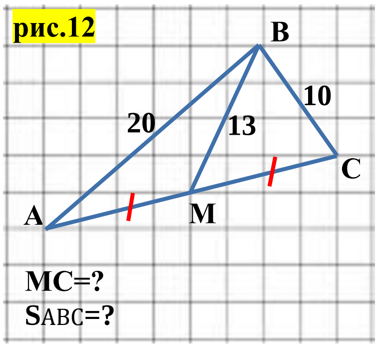
2. ABCD – прямоугольная трапеция с основаниями BC=8, AD=16 и большей боковой стороной AB=10. Точка K – середина AB. Высота BH пересекает прямую DK в точке O. Найдите площадь треугольника MOD.

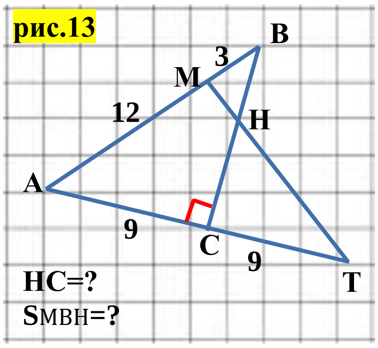
Тема 2.5 Треугольники и окружности. Закрепление изученного материала

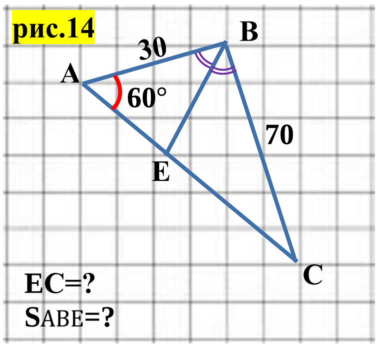
По готовым чертежам решите задачи на комбинацию изученных свойств.

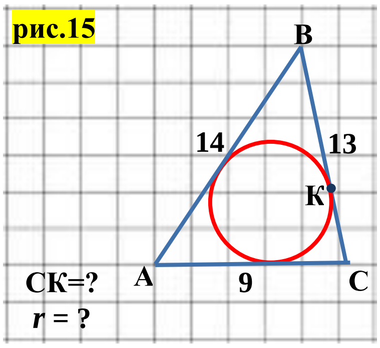












Домашнее задание

1. Две стороны треугольника равны 6 и 8, а медиана, проведённая к третьей стороне равна 5. Докажите, что треугольник – прямоугольный (используйте приём «удвоение медианы»).

2. В треугольнике ABC стороны AB=BC=15, AC=12. Точка K лежит на AB, AK=9, точка M лежит на BC, BM=10, прямые KM и AC пересекаются в точке T. Примените теорему Менелая и найдите CT, а также докажите, что отрезки KM и MT равны.

Тема 3.1 Четырёхугольники и окружности. Что необходимо знать о четырёхугольниках?

Среди множества четырёхугольников больше всех изучаются в рамках школьной геометрии параллелограммы и трапеции. Стоит сразу уточнить, что ромб, прямоугольник, квадрат – являются частными случаями параллелограмма. Их свойства напрямую следуют из свойств параллелограмма. Вспомним, сначала, формулы площадей четырёхугольников.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту: $\boldsymbol{S=\frac{a+b}{2}\cdot h}$.

Площадь параллелограмма можно определить через произведение стороны на высоту, проведённую к ней $\boldsymbol{S=ah}$.

Так же площадь параллелограмма определяется произведением двух сторон на синус угла между ними: $\boldsymbol{S=ab\cdot sin(\alpha)}$.

Для любого произвольного четырёхугольника площадь определяется как половина произведения его диагоналей на синус угла между ними: $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}d_1d_2\cdot sin(\alpha)}$.

В частности, угол между диагоналями ромба – прямой, следовательно, его площадь определяется как: $\boldsymbol{S=\frac{1}{2}d_1d_2}$.

Так же, для четырёхугольника площадь равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности: $\boldsymbol{S=pr}$.

При каких условиях в четырёхугольник можно вписать окружность, и когда около него можно описать окружность?

В четырёхугольник можно вписать окружность только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Около четырёхугольника можно описать окружность, если сумма его противоположных углов равна 180°.

Верными будут и обратные к этим утверждения.

Четырехугольник ABCD можно описать окружностью. Докажите, что $\angle BAC = \angle CDB$.

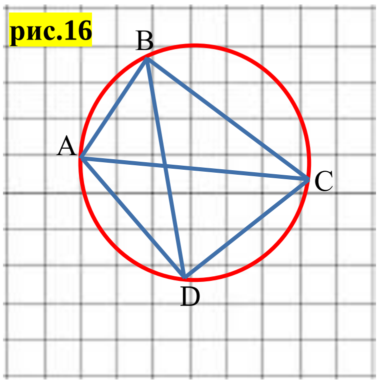
Приведём доказательство:

Если четырёхугольник можно описать окружностью, то мы получаем вписанные углы. $\angle BAC = \angle CDB$, т.к. они вписанные и оба опираются на $\cup$ BC, ч.т.д.

При решении задач часто используется обратное утверждение:

Если два равных угла опираются на один и тот же отрезок, то четыре точки – концы данного отрезка и вершины данных углов, лежат на одной окружности.

рис.16



Добавим к нашим «инструментам» так же теорему Птолемея:

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон. То есть $\boldsymbol{AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD}$.

№1. В четырёхугольнике ABCD углы B и D – прямые, AB=7, BC=24, CD=15. Найдите BD.

№2. В четырёхугольнике MNPK MN=3, NP=PK=5, MK=8, MP=7.

а) докажите, что данный четырёхугольник вписанный;

б) найдите длину NK.

№3. Дана окружность с центром O и радиусом 4, в которой хорда AB равна её радиусу. Вторая окружность с центром O_1 построена на AB как на диаметре, она пересекает отрезок AO в точке E. Найдите площадь четырёхугольника OEO_1B.

№4. Найдите площадь равнобедренной трапеции ABCD с боковой стороной AB=12, если в неё вписана окружность радиуса 5.

№5. Основания трапеции равны 10 и 20, а боковые стороны равны 6 и 8. Найдите площадь трапеции.

№6. Окружность с центром O касается сторон BC, CD, AD параллелограмма ABCD. Прямая CO пересекает AD в точке K, $\angle ADC=120°$. Найдите радиус окружности, если $CD=4\sqrt{3}$.

Домашнее задание

1. В трапеции ABCD сторона AB перпендикулярна основаниям. Точка K лежит на продолжении основания BC за точку C так, что AK и CD перпендикулярны и пересекаются в точке H.

а) докажите, что $\Delta ABK \sim \Delta AHD$;

б) найдите $\cos\angle CKH$, при HD=6, HA=8.

2. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении AO за точку O отмечена точка K так, что BK=OK.

а) докажите, что четырехугольник ABKC вписанный;

б) пусть $\angle KBC = 45°$, радиус окружности, описанной около ABKC равен 5, и AC=6. Найдите радиус вписанной окружности в Δ ABC.

Тема 3.2 Четырёхугольники и окружности. Закрепление изученного материала

На этом уроке нам предстоит разобрать задачи про четырёхугольники более сложного уровня.

№1. В трапеции ABCD точка M – середина боковой стороны CD, диагональ AC является так же биссектрисой угла A, а отрезки BM и BD делят угол B на три равные части. Найдите величину наименьшего угла данной трапеции.

№2. ABCD – прямоугольная трапеция с основаниями AD и BC. На меньшей боковой стороне AB, как на диаметре построена окружность с центром O, касающаяся стороны CD в точке K. Докажите, что треугольники BCK и AOK подобны.

№3. ABCD – трапеция с основаниями BC=3 и AD=7. AC=6, BD=8. Докажите, что $AC \perp BD$.

№4. В треугольнике ABC проведены высоты AH и BK.

а) докажите, что точки A, B, H, K лежат на одной окружности;

б) найдите радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 30, BC=10, $\cos\angle CAH=0{,}4$.

№5. Около четырёхугольника ABCD описана окружность с центром O, AC является её диаметром. Известно, что AD=CD, AB=2BC. Из точки B на AC опущен перпендикуляр BH.
а) докажите, что ∠ABO = ∠CBH;
б) найдите cos∠DOB.

№6. В трапеции ABCD угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M.
а) докажите, что ∠BAM = ∠CAD;
б) найдите AD, если AB=6, BC=4BM.

Домашнее задание

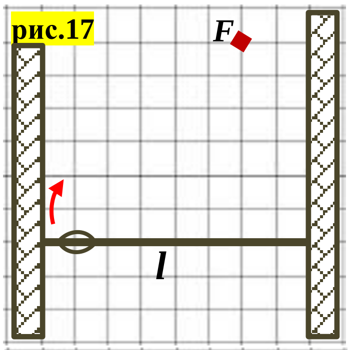
1. В квадрате ABCD точка K – середина стороны BC, точка M делит сторону CD в соотношении 1:3, считая от C.
а) докажите, что ∠BAK = ∠CKM;
б) найдите cos ∠KMA.

2. ABCD – трапеция, её основания AD=3BC, так же известны углы ∠BAD=60°, ∠CDA=30°.
а) докажите, что AB=BC;
б) найдите площадь трапеции, если её высота равна $2\sqrt{3}$.

Тема 4.1 Подведение итогов по главе. Решение практико-ориентированных задач

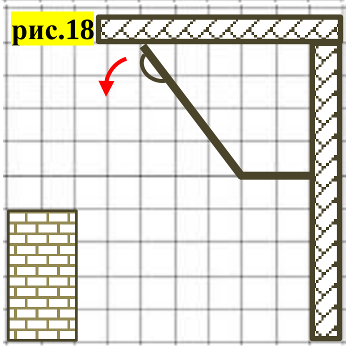
№1. Для входной двери в полу устанавливают дверной ограничитель в точке F, не позволяющий ей открываться полностью, чтобы предотвратить её повреждение. Ширина двери $l = 101$см, ограничитель устанавливают на расстоянии 99см от двери. Найдите наибольшее возможное расстояние от ограничителя до стены, при котором дверь не пройдёт мимо него.

рис.17



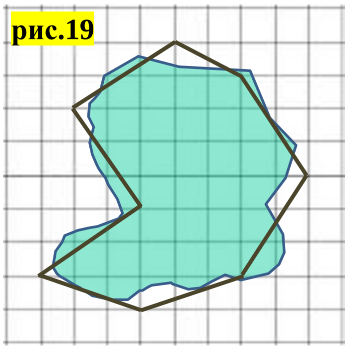
№2. В коридоре планируется встроить угловой шкаф. На рисунке 18 показано, как это будет выглядеть. У шкафа будет единственная дверь. Стрелка указывает, как она будет открываться. Не будет ли дверь задевать за угол стены, расположенный напротив неё? Для расчётов примите, что длина и ширина клеток равна 20см.

рис.18



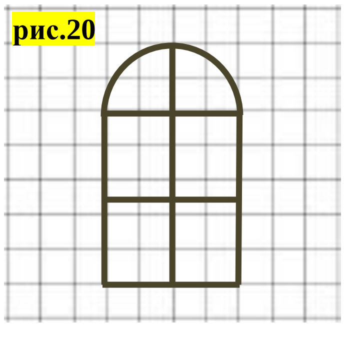
№3. На рисунке 19 карта, на которой изображено озеро. Стороны каждой клетки равны 1км. Чтобы примерно оценить площадь озера, эколог построил многоугольник, форма которого близка к форме озера. Недалеко от озера планируется построить завод. Эколог выдаст разрешение на строительство, если площадь озера больше 38км². Какое заключение даст эколог?

рис.19



№4. На рисунке 20 изображена схема строения окна. Верхняя часть окна является полукругом. Сторона клетки 15см. Чтобы освещенность комнаты была нормальной, необходимо, чтобы суммарная площадь всех окон в комнате составляла не менее 4м². Сколько таких окон надо установить в данном помещении, чтобы выполнить условие?

рис.20



№5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K, радиус первой в 4 раза меньше радиуса второй. Общая касательная касается первой окружности в точке A, второй – в точке B. Прямая O_1O_2 пересекает прямую AB в точке P.
а) докажите, что $\angle O_2AB = 45°$;
б) найдите отношение площадей треугольников PAO_2 и ABO_2.

№6. ABCD – ромб, ∠A = 30°, высота BH и диагональ AC пересекаются в точке E. В треугольник ABH вписана окружность с центром O. Прямая OH пересекает сторону AB в точке T. Докажите, что точки O, E, B, T лежат на одной окружности.

Домашнее задание

1. BM – медиана треугольника ABC с прямым углом B. В треугольник ABM вписана окружность с центром O.

а) докажите, что прямые OM и BC параллельны;

б) найдите площадь BOMC, если AC=12, ∠BCA=30°.

2. В прямоугольнике ABCD точка O – середина AC, точка E – середина AO, BC=3AB.

а) докажите, что ∠ABE = 45°;

б) найдите отношение площадей ABE и ABCD.

Тема 4.2 Подведение итогов по главе. Решение задач повышенного уровня сложности

№1. Дан параллелограмм ABCD. Окружность проходит через вершины параллелограмма A, B и C и пересекает продолжение стороны AD за точку D в точке E, и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке K.

а) докажите, что BK=BE;

б) найдите отношение KE:AC, если ∠BAD=30°.

№2. В равнобедренной трапеции ABCD основания AD=2BC.

а) докажите, что высота CH трапеции разбивает основание AD на отрезки, один из которых в три раза больше другого.

б) O – точка пересечения диагоналей трапеции, найдите расстояние от вершины C до середины OD, если BC=16 и AB=10.

№3. В параллелограмме ABCD высота BH, проведённая к стороне AD и диагональ AC пересекаются в точке E, $\angle AEB = 120°$ и BE:EH=2:1.

а) докажите, что данный параллелограмм – ромб;

б) расстояние от центра вписанной в ромб окружности до E равно $\sqrt{3}$. Найдите площадь ромба.

№4. ABCD – ромб. Точка P – середина диагонали AC, BE – высота, проведённая к стороне AD.

а) докажите, что треугольники PEB и ABC подобны;

б) найдите площадь фигуры AEPB, если AE=7, ED=18.

№5. Окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML – в точке A. Окружность с центром O_1 касается ML и продолжений боковых сторон.

а) докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный;

б) найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и AK=16.

№6. Дан треугольник ABC. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1.

а) докажите, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны;

б) известно, что площадь четырёхугольника BCB_1C_1 в 3 раза больше площади треугольника AB_1C_1, BC=10, угол A равен 120°. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1.

Домашнее задание

1. Около треугольника ABC описана окружность. Центр вписанной окружности – точка O. Прямая BO вторично пересекает описанную окружность в точке P.

а) докажите, что OP=AP;

б) пусть ∠ABC=120°, а радиус описанной окружности равен 18, найдите расстояние от точки P до прямой AC.

2. ABC – треугольник с прямым углом A. Около него описана окружность с центром O. Биссектрисы углов B и C пересекают окружность в точках K и E.

а) докажите, что ∠KOE – прямой;

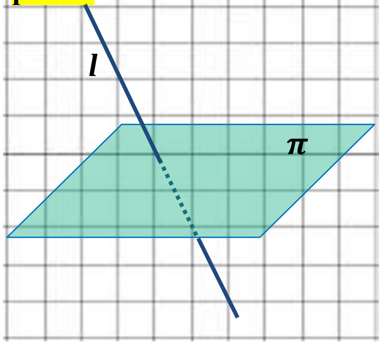
б) найдите ∠B и ∠C, если площади ΔKOE и ΔABC равны 3 и $3\sqrt{3}$.

Тема 5.1 Введение в стереометрию. Основные аксиомы

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Геометрия строится на некоторых базовых утверждениях, не требующих доказательств – аксиомах. Из аксиом выводятся теоремы, свойства и признаки.

В пространстве существует бесконечно много плоскостей и прямых. Плоскость в пространстве изображается как на рис.21. Изображение пространственной фигуры сохраняет параллельность прямых. Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат – будут изображаться как параллелограмм. Треугольники будут изображаться, как треугольники, трапеции, как трапеции.

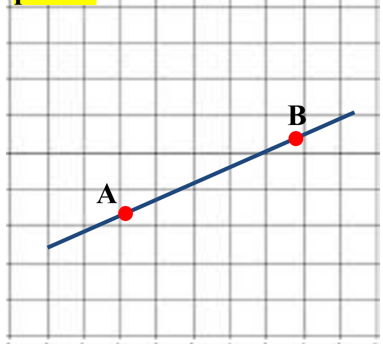
рис.21



Плоскость называют тремя буквами по точкам, через которые она проходит, например, (АВС), или строчной буквой греческого алфавита, например: $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

Прямые в пространстве называют строчной латинской буквой. Иногда часть прямой может быть невидима для наблюдателя, невидимую часть принято изображать пунктиром.

рис.22

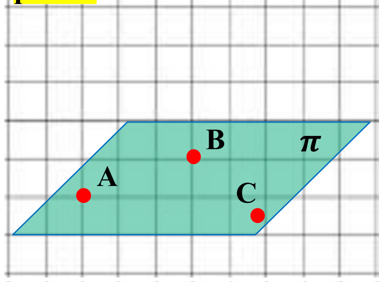


В основе стереометрии лежат 4 аксиомы:

А1: Через любые две точки пространства можно провести единственную прямую (рис.22);

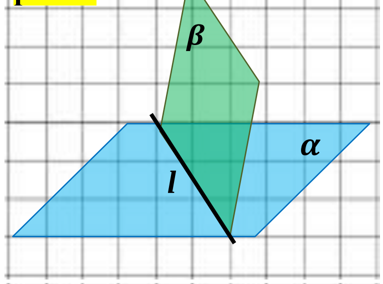
А2: Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость (рис.23);

рис.23



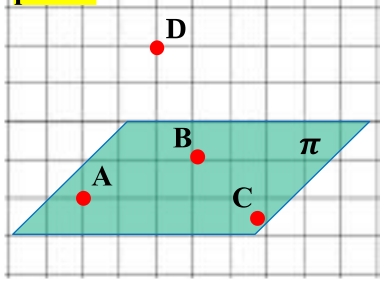
А3: Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются, и линия их пересечения – прямая (рис.24);

рис.24



А4: Существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости (рис.25).

рис.25



Из этих аксиом с помощью простых рассуждений мы получим важные следствия.

1) **Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести единственную плоскость**.

Пусть есть точка М, и прямая, на которой она не лежит. На этой прямой отметим две точки К и Р. Тогда, согласно А2, мы имеем три точки М, К, Р, не лежащие на одной прямой, и через них можно провести единственную плоскость (сделайте иллюстрацию сами).

2) **Через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость**.

Пусть прямые пересекаются в точке М. Отметим точку К на первой из них, точку Р на второй из них так, чтобы ни одна из них не совпала с точкой М. Тогда, согласно А2, мы имеем три точки М, К, Р, не лежащие на одной прямой, и через них можно провести единственную плоскость (сделайте иллюстрацию).

№1. Выпишите по порядку буквы, соответствующие правильным ответам теста. Получите из букв некоторое понятие.

1. В пространстве через точку можно провести:
о) единственную прямую;
п) две прямых;
а) три прямых;
т) бесконечно много прямых.

2. В пространстве через две точки можно провести:
а) единственную плоскость;
п) две плоскости;
в) три плоскости;
о) бесконечно много плоскостей.

3. Если прямая и плоскость имеют ровно 1 общую точку, то:
п) они параллельны;
о) прямая лежит в плоскости;

ч) прямая пересекает плоскость;
ш) такой случай не возможен.

4. Если прямая и плоскость имеют две общие точки, то:
е) они не пересекаются;
к) прямая лежит в плоскости;
о) они пересекаются;
ш) такой случай не возможен.

5. Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то:
а) они параллельны;
п) прямая лежит в плоскости;
в) они пересекаются;
ч) такой случай не возможен.

Если вы верно ответили на все вопросы теста, то получили из букв одно из фундаментальных геометрических понятий. Можно ли ему дать определение?

рис.26

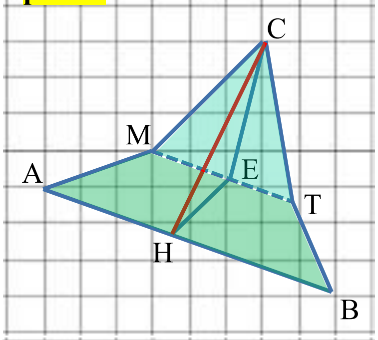
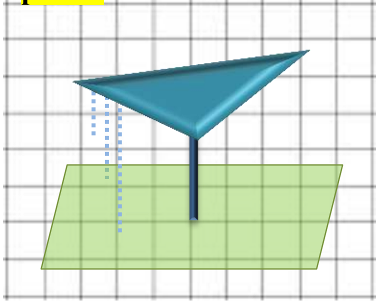


рис.27



№2. Изобразите плоскость в виде правильного треугольника и подумайте: где располагается множество точек пространства, равноудалённых от трёх вершин этого треугольника?

№3. Изобразите плоскость квадрата. Что является множеством всех точек, равноудалённых от самой этой плоскости?

№4. На рисунке 26 изображен правильный треугольник ABC, который перегнули по средней линии MT=2, которую высота CH пересекала в точке E. Оказалось, что ∠CEH=120°. Найдите длину отрезка CH.

№5. На детской площадке построили навес от дождя в форме правильного треугольника со стороной 3м и металлической ножкой в точке пересечения медиан (рис.27). В безветренный день дождь идёт без наклона к плоскости земли. На какое максимальное расстояние можно отойти от ножки, чтобы капли дождя не попадали на вас? Ответ дайте в метрах с точностью 0,1м.

Домашнее задание

1. Две плоскости пересекают друг друга. В одной из них лежит квадрат ABCD, в другой – окружность с диаметром AC. Расстояние от точки B до центра окружности равно $\sqrt{32}$. Найдите периметр квадрата.

2. Две плоскости пересекают друг друга. В одной из них лежит квадрат ABCD, площадь которого равна 100, в другой – треугольник BCK, у которого KC=9, KB=$\sqrt{19}$. Найдите расстояние от точки K до середины отрезка BC.

Тема 5.2 Введение в стереометрию. Решение задач на закрепление материала

№1. Плоскость β представлена кругом с центром O и радиусом 9. Точка K такова, что она равноудалена от всех точек окружности на расстояние 15. Найдите расстояние от точки K до плоскости β.

№2. Два равных равнобедренных треугольника ABC и APC со сторонами 5, 5, 6 в пространстве имеют общее основание AC. Угол между медианами, проведенными к основанию, равен 90°. Чему равно расстояние между их вершинами?

№3. Даны два правильных треугольника. ΔABC лежит в плоскости α, другой Δ BMK – пересекает эту плоскость по прямой BK, которая является медианой первого треугольника. Сторона треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$. Найдите длину высоты треугольника BMK.

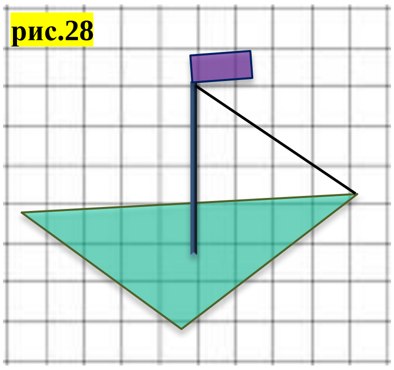
№4. Окружность с центром в точке O и диаметром 14 лежит в плоскости β. Точки A и B лежат на окружности. Точка C – не лежит в плоскости β, CO=7. Докажите, что Δ ABC – прямоугольный.

№5. Окружность с центром O и диаметром 20 лежит в плоскости β. Точка A не лежит в плоскости β. Точка B лежит на окружности, AO=6, AB=8. Докажите, что Δ AOB – прямоугольный.

№6. Из листа бумаги вырезали равнобедренную трапецию ABCD, у которой боковые стороны AB=CD=10. Провели высоту BH=8, отрезок HD=$6\sqrt{3}$. Лист согнули по линии этой высоты так, что ∠AHD=90°. Найдите ∠ADH.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC, вырезанном из бумаги, стороны $AB=BC=6\sqrt{3}$. Точки P и K – середины этих сторон. Треугольник согнули по прямой PK так, что $\angle APB=120°$. Найдите расстояние между точками A и B.



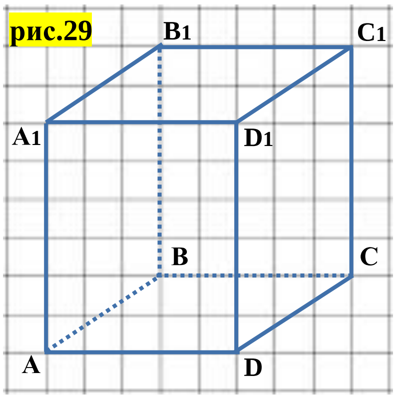
2. Из листа бумаги вырезали трапецию ABCD, у которой боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, AB=3, BC=4, CD=5. Провели высоту CH и лист согнули по линии этой высоты так, что $\angle AHD=90°$. Найдите $\angle HAD$.

3. На участке в форме равнобедренного треугольника ABC со сторонами AB=BC=10м, $AC=\sqrt{22}$м был установлен флаг высотой 3м в точке пересечения медиан O. Для устойчивости флага его нужно закрепить тросом, который соединит вершину флага с точкой C. Найдите длину троса. Ответ дайте в метрах.

Тема 6.1 Начальные сведения о многогранниках. Виды многогранников и их свойства

В курсе стереометрии мы познакомимся с разными фигурами. Проведём их классификацию и научимся их изображать.

Многогранник – замкнутая поверхность, образованная конечным числом многоугольников. Выделяют три главных элемента каждого многогранника.

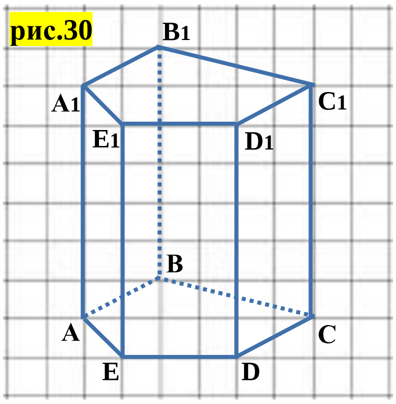


1) Грани – многоугольники, из которых составлен многогранник. Гранью может служить любой известный многоугольник.

2) Рёбра – каждая сторона грани называется ребром. Ребро является отрезком, образующимся на пересечении двух граней.

3) Вершины – каждая из точек, которые являются концами рёбер. В одной вершине могут сходиться несколько рёбер и несколько граней. Наиболее известный вам многогранник – прямоугольный параллелепипед (рис.29). Изобразите его в тетради, скопировав рисунок.

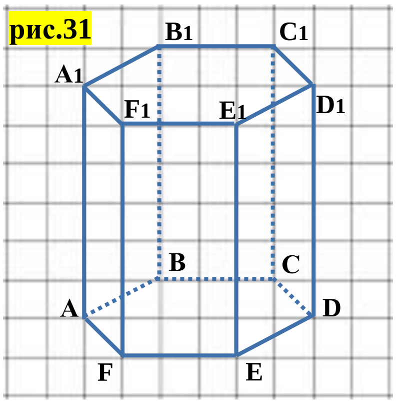
Вершины называют одной буквой. Например, вершина B_1. Сколько вершин у параллелепипеда? Рёбра следует называть двумя буквами. Например, ребро AA_1. Сколько рёбер у параллелепипеда? Грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Поэтому все они называются четырьмя буквами. Например, грань ABCD. Сколько граней у параллелепипеда? Название параллелепипед получил из-за того, что его противоположные грани лежат на параллельных плоскостях. Параллельными называют плоскости, которые не пересекаются.



Все многогранники называют, перечисляя по порядку их вершины: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

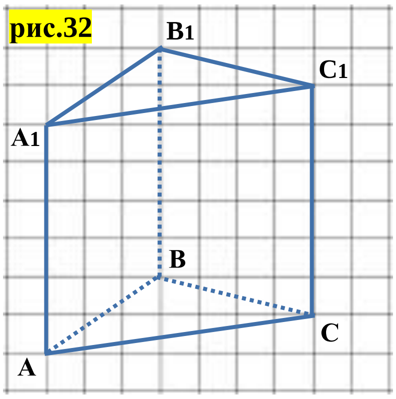
Прямоугольный параллелепипед – разновидность прямой призмы.

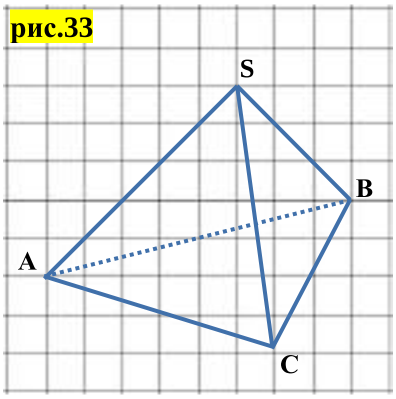
Прямая призма – многогранник, две грани которого, называемые основаниями, параллельны и являются равными многоугольниками, все остальные, называемые боковыми гранями – всегда прямоугольники.

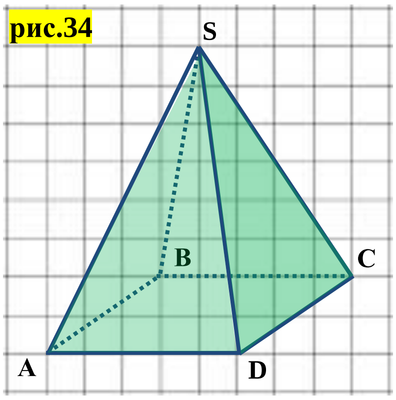


Призмам дают название в зависимости от многоугольника, который лежит в основании. На рисунке 30 изображена пятиугольная призма, на рисунке 31 – шестиугольная. Их боковые рёбра перпендикулярны основаниям и параллельны друг другу.

Правильная призма – это прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник. На рисунке 32 – правильная треугольная призма. Наклонные призмы мы изучим позже. По умолчанию будем считать, что призма прямая.







Пирамида – многогранник, который имеет основание – некоторый многоугольник, вершину – точку, не лежащую в плоскости основания, и треугольные боковые грани, которые соединяют основание с вершиной.

Пирамидам дают название в зависимости от их основания: треугольная (рис.33), четырёхугольная, и т. д. Также, если в основании пирамиды лежит правильный многоугольник и вершина пирамиды расположена точно над его центром, то пирамиду называют правильной. На рисунке 34 правильная четырёхугольная пирамида. Стоит заметить, что под многогранником могут понимать не только замкнутую поверхность, но и тело, ограниченное этой поверхностью. О чём именно идёт речь – должно быть понятно из контекста.

№1. Выпишите буквы, соответствующие верным ответам.

1. У треугольной призмы:
а) все грани треугольные;
к) всего 5 граней;
о) не может быть квадратных граней;
п) никакие грани не лежат на параллельных плоскостях.

2. В прямоугольном параллелепипеде:
т) нет равных граней;
п) всего 8 рёбер;
о) найдутся 5 вершин, не лежащих в одной плоскости;
к) найдутся 5 рёбер, принадлежащих одной грани;

3. В треугольной пирамиде:
п) число граней меньше числа вершин;
а) число рёбер меньше числа вершин;
у) не может быть равных рёбер;
н) не может быть параллельных граней.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде:
у) некоторые грани треугольные;
а) все грани четырёхугольные;
е) всего 4 грани;
о) всего 4 вершины.

5. У любого многогранника:
т) минимум может быть 5 граней;
с) минимум может быть 4 вершины;
п) максимум в одной вершине сходятся 3 ребра;
к) максимум одно ребро соединяет 3 плоскости.

Название какой геометрической фигуры вы получили?

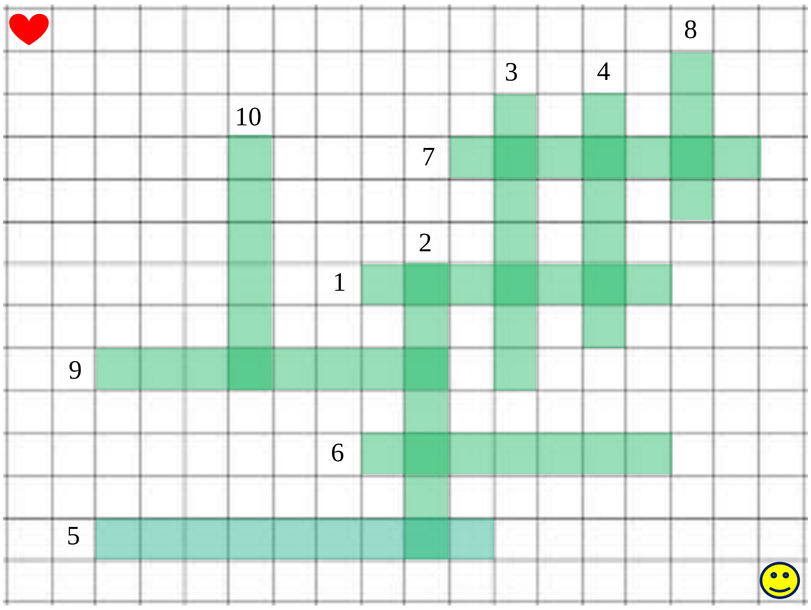
№2. Изобразите в тетради прямую призму $ABCA_1B_1C_1$. Известно, что AB=3, AB_1=5, BC=12. Найдите B_1C.

№3. Изобразите в тетради правильную четырёхугольную пирамиду SABCD.
а) пусть ребро основания равно ***a***, выведите формулу, по которой вы быстро сможете находить диагонали AC и BD.
б) пусть O – точка пересечения этих диагоналей, найдите отрезок AO, если AB=$\sqrt{18}$.

№4. Изобразите в тетради правильную шестиугольную призму $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
а) чему равен угол правильного шестиугольника?;
б) что получим, если провести все диагонали AD, BE, CF?;
в) что вы можете сказать про прямые AD и BF?;
г) пусть AB=5, найти AD.

Домашнее задание

1. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь. Вопросы переписывать не нужно.



1. Истина, не требующая доказательства.
2. Правильный четырёхугольник.
3. Точка, в которой сходятся рёбра многогранника.
4. Многогранник с двумя равными параллельными основаниями.
5. Поверхность, часть которой является гранью многогранника, один из объектов геометрии.
6. Критерий, на который в геометрии ссылаются при доказательстве некоторого факта.
7. Доказываемое свойство, правило, формула.
8. Параллелограмм, у которого все стороны равны.
9. Многогранник с основанием и вершиной, все боковые грани которого – треугольники.
10. Перпендикуляр, соединяющий вершину и противоположную ей сторону треугольника.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, BC=2, AC=$\sqrt{20}$, $AA_1=4\sqrt{3}$. Найдите $\angle BAB_1$.

3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, в которой прямые FC_1 и CF_1 перпендикулярны, и боковое ребро равно 4. Найдите площадь основания данной призмы.

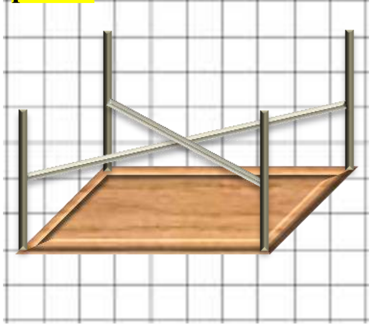
Тема 6.2 Начальные сведения о многогранниках. Задачи о многогранниках

№1. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF с вершиной S, ребром основания $2\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{39}$ найдите отношение площадей боковой грани и грани основания.

№2. Изобразите в тетради многогранник, который получен соединением куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и правильной четырёхугольной пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$. Найдите общую длину всех рёбер этого многогранника, если $SA_1=9$, и $\angle A_1SB_1=60°$.

№3. После изготовления стола оказалось, что его четыре ножки не устойчивы, и их решили укрепить дополнительными рёбрами жёсткости, соединяющими середины противоположных ножек. Рёбра жёсткости сделаны из металлического прута. Сколько этого прута необходимо, если стол прямоугольный с длиной 120см и шириной 50см? Ответ дайте в метрах.

рис.35



№4. Сколько граней, рёбер и вершин у многогранника, который получился после того, как:
а) у пятиугольной призмы отсекли все её углы?;
б) у четырёхугольной пирамиды отсекли все её углы?

№5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, в которой ребро основание равно 60, а $AB_1=61$. Найдите общую длину всех рёбер данной призмы.

№6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма, в которой боковое ребро равно 12, а $tg\angle B_1AB=0{,}3$. Найдите общую длину всех рёбер данной призмы.

Домашнее задание

1. В правильной треугольной пирамиде MABC боковые рёбра равны 20, рёбра основания равны 24. Точки P и K – середины рёбер AB и BC. В треугольнике MPK найдите длину медианы PE.

2. EABC – треугольная пирамида, треугольники ABC и ABE – равные прямоугольные с катетами AC=AE=16, BC=BE=12, EM и CM – их медианы, $EC=10\sqrt{2}$. Докажите, что $\angle ECM = 45°$.

Тема 6.3 Начальные сведения о многогранниках. Закрепление изученного материала

№1. MABC – правильная треугольная пирамида, в которой боковое ребро равно 4, а $\angle AMB=120°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

№2. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида, в которой боковое ребро равно $3\sqrt{2}$, а $\angle AMB=90°$. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник ABCD.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Около основания куба описана окружность с радиусом $4\sqrt{2}$. Найдите общую длину всех рёбер куба.

№4. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, в которой $\angle ABC$ – прямой, AB=BC=7, $AA_1=7\sqrt{2}$. Докажите, что прямые AC_1 и CA_1 перпендикулярны друг другу.

№5. Многогранник получен соединением правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и правильной пирамиды $MA_1B_1C_1$, $BA_1=8$, $MA_1=4\sqrt{3}$, $\angle ABA_1=30°$. Найдите $\angle A_1MB_1$.

№6. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, в основании которой треугольник ABC с прямым углом B, AB=6, BC=8, BH – высота этого треугольника, высота призмы равна 6,4. Найдите $\angle C_1HC$.

№7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, в основании которой параллелограмм ABCD, в котором проведена биссектриса угла A, пересекающая сторону BC в точке E, BE=3, EC=4, $BB_1=3\sqrt{3}$. Найдите $\angle AB_1B$.

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, AC=15, B=8, $AA_1=84$, $\angle ACB=60°$. Найдите A_1B.

2. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, в которой $BB_1=5$, $CB_1=\sqrt{26}$, $AB_1=1$, точка K – середина AC. Докажите, что прямые AC и BK перпендикулярны друг другу.

Тема 7.1 Взаимное расположение прямых в пространстве. Теоретические основы

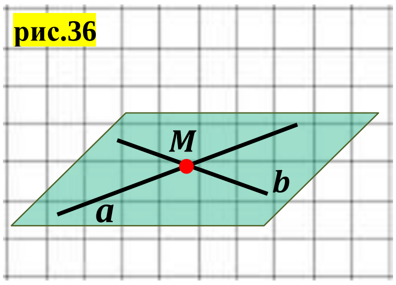
В пространстве есть четыре варианта взаимного расположения двух прямых. Первый из них – совпадающие прямые.

Совпадающими называют две прямые, если все точки одной прямой так же принадлежат другой прямой.

Пересекающиеся прямые – это прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку.

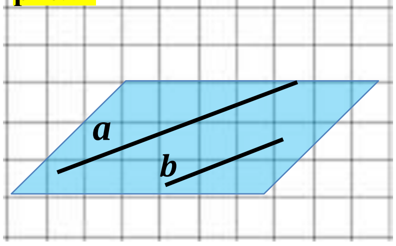
Запись $a \cap b = M$ означает, что прямые a и b пересекаются в точке M (рис.36). Пересекаясь, прямые образуют четыре угла.

рис.36



Параллельные прямые – это прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек. Запись вида $a \parallel b$ означает, что прямые a и b параллельны (рис.37).

рис.37

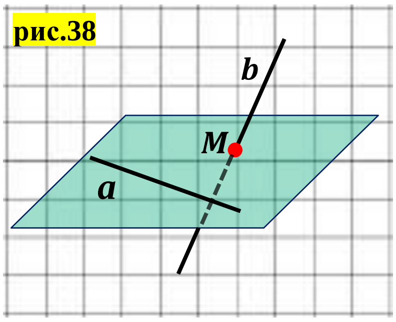


Повторим различные признаки параллельности прямых.

1) Если при пересечении двух прямых третьей прямой накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны;

2) Если при пересечении двух прямых третьей прямой соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны;

рис.38



3) Если при пересечении двух прямых третьей прямой сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то эти две прямые параллельны;

4) Так же используется транзитивность: две прямые, параллельные третьей прямой, являются параллельными.

5) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же прямой, являются параллельными – частный случай пунктов 1, 2, 3;

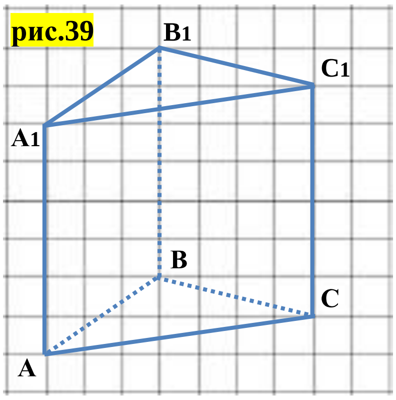
Скрещивающиеся прямые – это прямые, которые не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Для скрещивающихся прямых сформулируем признак:

Если одна прямая лежит в плоскости, а другая – пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые – скрещивающиеся.

Следующее задание поможет разобраться с пониманием темы.

рис.39



№1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ определите взаимное расположение пар прямых (рис.39):

а) AC и BB_1; б) AB и BB_1; в) BC и A_1B; г) BB_1 и CC_1;
д) A_1C_1 и BB_1; е) AC_1 и BC_1; ж) AB_1 и BC_1; з) AB и AB_1.

Приведём решение пункта (а).

Прямая AC лежит в плоскости (ABC), а прямая BB_1 пересекает эту плоскость в точке B, причём B не лежит на прямой $AC \Longrightarrow AC$ и BB_1 – скрещивающиеся прямые.

№2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB=3$, $BC=6$, $CC_1=4$.

а) докажите, что прямые C_1D и A_1D_1 – скрещивающиеся;

б) найдите $\cos\angle C_1DC$.

№3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$, $CC_1=3$.

а) докажите, что прямые AA_1 и CC_1 параллельны;

б) найдите $\angle C_1BC$.

Домашнее задание

1. В правильной пирамиде $SABCD$ рёбра основания равны 6, боковые рёбра равны 5.

а) докажите, что прямые SA и BC скрещивающиеся;

б) найдите отношение площадей граней SAB и $ABCD$.

2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB=BC=12$, $AC=16$, $CC_1=3$. Точка M лежит на ребре A_1B_1 так, что $AM=9$, точка K лежит на ребре A_1C_1 так, что $AK=12$.

а) докажите, что прямые MK и BC параллельны;

б) найдите отношение площадей граней ABB_1A_1 и ACC_1A_1.

Тема 7.2 Взаимное расположение прямых в пространстве. Решение задач

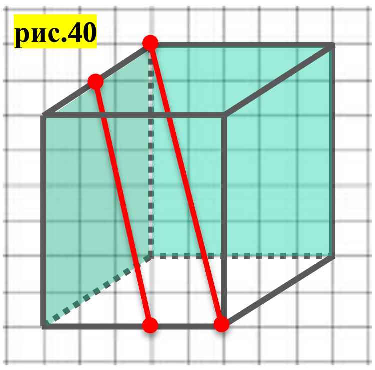
№1. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=4$, $BC=6$, $AA_1=12$. Точка K делит ребро BB_1 так, что $BK:KB_1 = 2:1$.

а) докажите, что прямые AK и CC_1 скрещивающиеся;

б) докажите, что прямые A_1B_1 и CD параллельны;

в) найдите косинус угла KAB;

рис.40



№2. Два параллельных проводника притягиваются, если ток течёт в одном направлении. Если они не параллельны, то этот эффект ослабится, что уменьшит их деформацию. Инженер рассмотрел конструкцию в форме параллелепипеда на рис. 40, и решил, что красные провода параллельны. Мог ли он допустить ошибку?

№3. Высота треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 12, ребра основания $AB=6$, $BC=9$. Точка E лежит на ребра AB так, что $BE=2$, точка K лежит на ребре BC так, что $BK=3$.

а) докажите, что прямые A_1E и C_1K пересекаются;

б) докажите, что прямые EK и A_1C_1 параллельны.

№4. Плоскость прямоугольника $ABCD$ пересекает плоскость равнобедренной трапеции $BCFE$, $BC=3EF$, EH – высота трапеции. Точки P и T – середины отрезков AE и AB. Докажите, что прямые PT и HF параллельны.

№5. SABC – треугольная пирамида, все рёбра которой равны 8. Точка K – середина ребра AS, точка M лежит на ребре BS так, что BM=2, точка P лежит на ребре AC так, что PC=3, точка E лежит на ребре BC так, что прямые KM и PE пересекаются в точке T. В каком соотношении точка E делит ребро BC? (воспользуйтесь т. Менелая).

№6. Призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет основание ABCD, около которого можно описать окружность и ∠B=∠D. В плоскости $A_1B_1C_1$ отрезок D_1H – высота, проведённая к ребру B_1C_1. Докажите, что прямые D_1H и AB параллельны.

Домашнее задание

1. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны $4\sqrt{3}$. Точки K и P – середины рёбер MB и MC. Прямые AK и DP пересекаются в точке E. Прямые AK и DP пересекаются в точке E.

а) докажите, что прямые ME и AB параллельны;

б) найдите площадь четырёхугольника MECD.

2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра $AB=BC=2\sqrt{2}$, $AA_1=\sqrt{7}$, ∠ABC – прямой. Точки K и M – середины рёбер AB и A_1C_1 соответственно.

а) докажите, что прямые AM и KB_1 – скрещивающиеся;

б) T – точка пересечения прямой KB_1 и плоскости (ACC_1), найдите площадь треугольника ACT.

Тема 7.3 Взаимное расположение прямых в пространстве. Закрепление материала

№1. MABC – пирамида с основанием ABC с прямым углом B, где окружность, построенная на BC, как на диаметре, пересекает AC в точке K, причём MK – высота пирамиды, E – середина AB, T – середина AK, P – середина BM, H – середина MK. Докажите, что прямые ET и PH параллельны.

№2. Окружность с центром O вписана в угол ABC = 60° и касается его сторон AB и CB в точках K и T соответственно. Точка E лежит на пересечении окружности и прямой OB. MO – высота пирамиды MBTOK, точка H – середина BM. Докажите, что EH ∥ MO.

№3. MABCD – пирамида, основание ABCD – трапеция, AB=CD, точка H – середина AD, MH – высота пирамиды. Точка K – середина AM, O – точка пересечения медиан треугольника AMD, точка E лежит на ребре CD так, что CE : ED = 1 : 2. Докажите, что CK ∥ OE.

№4. MABCD – пирамида, в основании которой параллелограмм ABCD, ∠BAD = 60°. $AB=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{7}$, O – точка пересечения диагоналей, MO – высота пирамиды, AM=MC=7. Докажите, что биссектриса ∠MAC и медиана ∠MDC – пересекающиеся прямые.

№5. SABC – пирамида с вершиной S. BM – медиана треугольника ABC, точка E лежит на её продолжении так, что BM=ME, SE – высота пирамиды. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков AS и BS параллельна прямой, соединяющей середины отрезков ES и CS.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Докажите, что прямая, соединяющая середины рёбер A_1B_1 и AD параллельна прямой, соединяющей середины рёбер B_1C_1 и CD. Так же докажите, что указанные прямыми являются скрещивающимися с прямой B_1D.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K лежит на ребре CD. Точка T – на продолжении ребра CD за точку D так, что CK=DT.

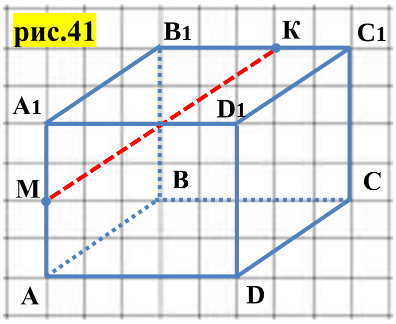
а) докажите, что прямые A_1K и B_1T пересекаются;

б) найдите площадь TD_1C_1C, если CK=3, KD=1.

Тема 8.1 Расстояние между точками в пространстве. Принципы поиска расстояния

Один из необходимых навыков в стереометрии – поиск расстояния между двумя точками. В основе алгоритма лежит теорема Пифагора. Предположим есть две точки A и B. Чтобы найти расстояние между ними, необходимо построить треугольник ABC, где угол C – прямой, найти AC и BC – его катеты, а по ним найти гипотенузу AB – искомое расстояние.

рис.41



№1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины рёбер $AB=\sqrt{3}$, BC=5, $CC_1=4$. Точка M – середина AA_1, точка K лежит на ребре B_1C_1 так, что $B_1K=3$.

а) докажите, что прямые MK и CC_1 – скрещивающиеся;

б) найдите длину отрезка MK.

Приведём решение задачи:

(а) Прямая CC_1 лежит в плоскости (BCC_1), а прямая МК пересекает эту плоскость в точке К, не лежащей на CC_1. По существующему признаку – данные прямые скрещивающиеся.

(б) Рассмотрим треугольник MA_1K – прямоугольный. В нём $A_1M=2$, $A_1K=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}$, и $MK=\sqrt{2^2+(\sqrt{12})^2}=4$.

Диагональ многогранника – отрезок, соединяющий вершины, не лежащие на одной грани.

Посчитайте, сколько диагоналей есть у прямоугольного параллелепипеда, шестиугольной призмы? Можете ли вы назвать многогранники, у которых нет диагоналей?

№2. В прямоугольном параллелепипеде длина, ширина, высота равны a, b, c.

а) докажите, что диагональ параллелепипеда можно вычислять по формуле: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

б) пусть длина и ширина параллелепипеда равны 5 и 6, а его диагональ равна $\sqrt{77}$. Найдите высоту параллелепипеда.

№3. В кубе длина ребра равна x.

а) докажите, что диагональ куба равна $x\sqrt{3}$;

б) найдите ребро куба, если его диагональ равна 6;

в) диагональ грани куба равна $\sqrt{2}$, найдите диагональ куба;

г) диагональ куба равна 1, найдите площадь трёх граней куба;

д) площадь грани куба равна 27, найдите диагональ куба;

е) сумма всех диагоналей куба равна $\sqrt{48}$, найдите сумму длин всех рёбер куба.

№4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно 4, боковое ребро равно 2. Точка К – середина ребра B_1C_1. Найдите расстояние между точками А и К.

Домашнее задание

1. Треугольник АВС – прямоугольный с прямым углом ВАС, известно, что АВ=16, $\angle ABC=30°$. Точка Н – основание высоты, проведённой к гипотенузе. Отрезок МН=15 не лежит в плоскости (АВС) и перпендикулярен прямым ВС и АН. Найдите расстояние между точками А и М.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 4. Точка О – пересечение диагоналей куба. Точка К лежит на продолжении ребра АВ за точку А. Расстояние между точками О и К равно $\sqrt{17}$. Найдите расстояние между точками А и К.

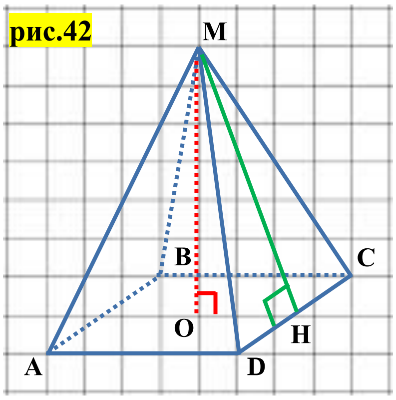
Тема 8.2 Расстояние между точками в пространстве. Высота и апофема пирамиды

Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из её вершины на основание.

Апофема – это высота боковой треугольной грани пирамиды, проведённая из вершины пирамиды к ребру основания.

На рисунке 42 в четырёхугольной пирамиде изображена МО – высота, МН – её апофема.

рис.42



№1. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD ребро основания равно 2, боковое ребро равно $\sqrt{11}$. Найдите высоту данной пирамиды.

№2. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD высота равна $\sqrt{28}$, а боковое ребро 10. Найдите длину её апофемы

№3. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания 6 и высотой 15. Точка Е делит ребро МС в соотношении 2:1, считая от вершины. Найдите расстояние АЕ.

№4. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды МАВС с ребром основания 12 и боковым ребром $\sqrt{148}$.

№5. MABCD – пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами АВ=20, ВС=18, все боковые рёбра равны $\sqrt{325}$. МО – высота пирамиды, МН – апофема, проведённая к ребру CD. Точка К – середина высоты, точка Р лежит на апофеме так, что НР:РМ = 1:2. Найдите расстояние между точками К и Р.

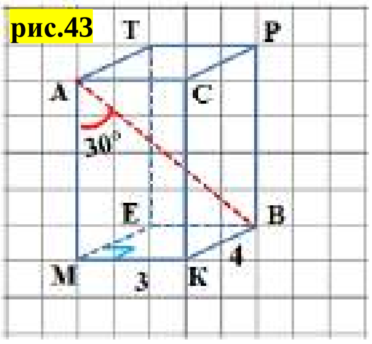
Домашнее задание

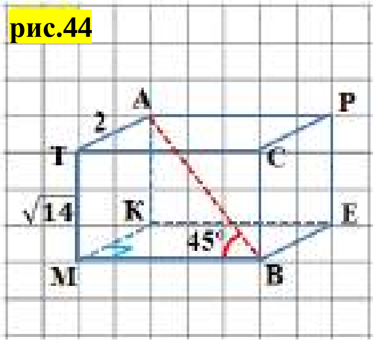
1. Найдите высоту правильной четырёхугольной пирамиды MABCD с ребром основания $6\sqrt{2}$ и боковым ребром 10.

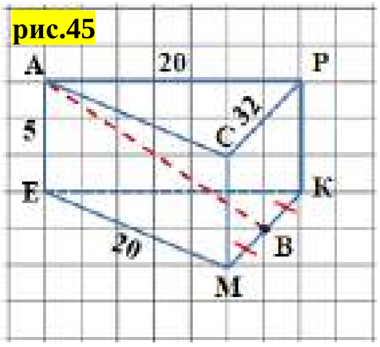
2. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды с ребром основания $2\sqrt{3}$ и боковым ребром $\sqrt{29}$.

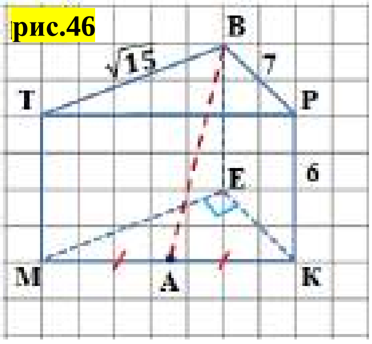
Тема 8.3 Расстояние между точками в пространстве. Закрепление материала

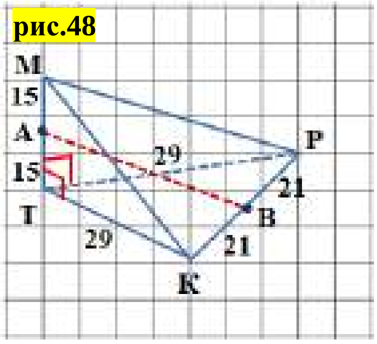
На готовом чертеже найдите расстояние между точками А и В.











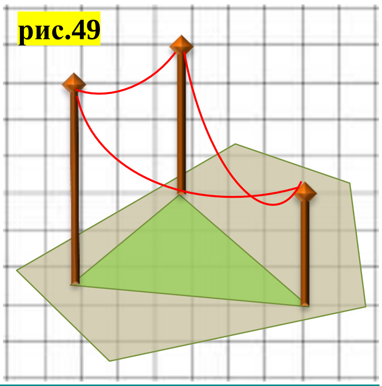
Домашнее задание

1. В сквере стоят три фонарных столба высотой 3м, 5,5м и 7,5м, средний и высокий столбы находятся на расстоянии 1,5м, а маленький столб равноудалён от них на 6м. Вершины столбов соединяют гирляндой. Сколько метров гирлянды потребуется, если на провисание нужен запас не менее 20% от общей длины (рис.49).

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 найдите расстояние от центра грани ABCD:

а) до вершины A_1;

б) до середины ребра BB_1



Тема 9.1 Расстояние от точки до прямой. Задачи на плоскости

По определению, расстояние от точки до прямой – есть длина перпендикуляра, опущенного из это точки на прямую. Поэтому поиск расстояния от точки до прямой сводится к поиску длины такого перпендикуляра. Рассмотрим такую задачу сначала на плоскости.

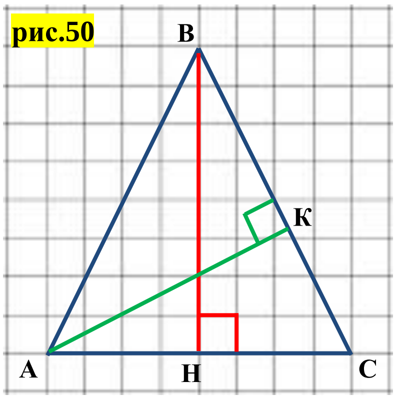
№1. В треугольнике ABC AB=BC=15, AC=18. Найти расстояние от точки А до прямой ВС.

Проведём высоты ВН и АК. Площадь треугольника АВС можно вычислить так:

$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH$ или $S = \frac{1}{2}BC \cdot AK$

Приравняв два этих выражения и умножив обе части на 2, мы получаем: $AC \cdot BH = BC \cdot AK$.

Откуда $АК = \frac{AC \cdot BH}{BC}$. Очевидно, что по теореме Пифагора высота $BH = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$. Тогда по выведенной выше формуле: $AK = \frac{18 \cdot 12}{15} = 14{,}4$. Ответ: 14,4.



Метод, которым мы воспользовались, называется методом площадей. Его можно обобщить, получив формулу: $\boldsymbol{h_a = \frac{2S_\Delta}{a}}$, где h_a – высота, проведенная к стороне a, $S\Delta$ – площадь треугольника.

№2. В прямоугольном треугольнике с катетами 7 и 24 найдите расстояние от вершины прямого угла до гипотенузы.

№3. В треугольнике ABC AB=18, BC=12, AC=20. Найдите расстояние от точки B до AC.

№4. В трапеции ABCD AB=BC=CD=10, AD=22. Найти расстояние от точки B до прямой AC.

№5. В трапеции ABCD сторона AB перпендикулярна основаниям. AB=4, BC=3, CD=5. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

№6. В параллелограмме ABCD сторона AB=6, площадь равна 30. Найдите расстояние от точки B до прямой CD.

№7. В параллелограмме ABCD стороны AB=8, BC=12, высота, проведённая к стороне AD, равна 6. Найдите расстояние от точки B до прямой CD.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC AB=BC=50, AC=28. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

2. В равностороннем треугольнике со стороной $7\sqrt{3}$ найдите расстояние от точки C до AB.

Тема 9.2 Расстояние от точки до прямой. Задачи в пространстве

Итак, если нам требуется искать расстояние от точки до прямой в пространстве, то на первом этапе необходимо свести задачу к планиметрической – найти нужный треугольник, вместе с плоскостью, в которой он находится. Затем, можно воспользоваться методом площадей.

№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 найдите расстояние от точки A до прямой B_1D_1.

№2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребрами AB=12, BC=9, CC_1=20, найдите расстояние от точки A до прямой A_1C.

№3. MABC – правильная треугольная пирамида, все рёбра которой равны $2\sqrt{3}$, найдите расстояние от точки B до апофемы MH, проведенной к ребру AC.

№4. Ребро основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равно 2, боковое ребро равно 1. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BF.

№5. MABCD – правильная пирамида с ребром основания $4\sqrt{2}$ и высотой MO=3.

а) точки K и T – середины рёбер AM и BM, докажите, что KT ∥ CD;

б) найдите расстояние от точки O до прямой MC.

№6. Комната имеет форму параллелепипеда длиной 4,2м, шириной 3м, высотой 2,8м. В центре потолка комнаты расположена светодиодная лампочка. Найдите расстояние от лампочки до плинтуса на полу у той стены, которая имеет меньшую длину.

№7. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 36 и высотой 4. Точка K – середина AC, точка E лежит на ребре A_1C_1 так, что EC_1=15. Найдите расстояние от C_1 до KE.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC AB=30, BC=26, проведенная высота BH делит сторону AC на отрезки AH=18, HC=10. Точка M не лежит в плоскости (ABC) и равноудалена от концов отрезка BH на расстояние 13. Найдите расстояние от точки M до прямой BH.

2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра AB=BC=8, CC_1=2, ∠ABC=120°. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC.

Тема 9.3 Расстояние от точки до прямой. Закрепление материала

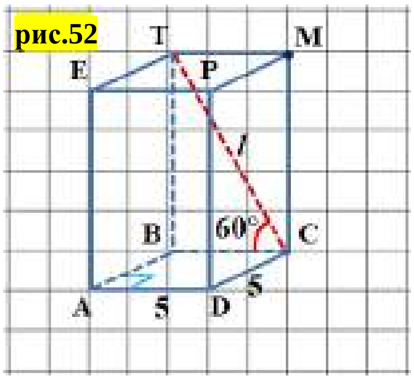
№1. Самолёт и танк располагаются на расстоянии 7,2км от пушки врага, способной поражать цели на расстоянии до 4,5км.

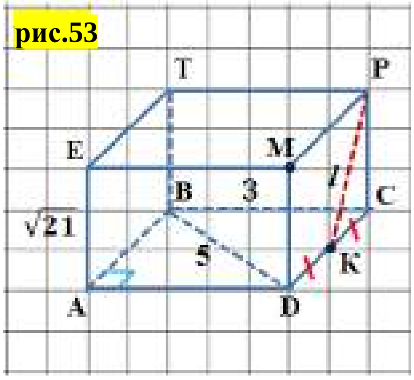
а) Самолёт полетел по прямой в направлении пушки, равномерно набирая высоту, рассчитывая, что если он пролетит над пушкой на высоте 5,4км, то она его не собьёт. Не мог ли пилот допустить ошибку?

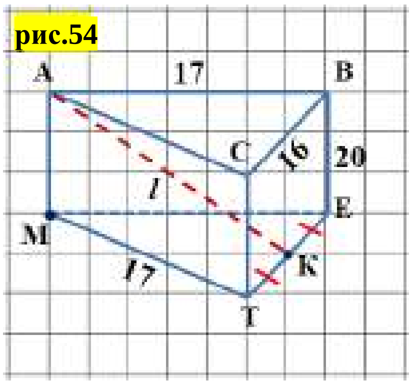
б) Танк поехал по прямой, отклонившись на 30° от направления пушки, надеялся проехать незаметно. Найдите длину пути, на котором он всё равно будет находиться в зоне поражения пушки (рис.51).

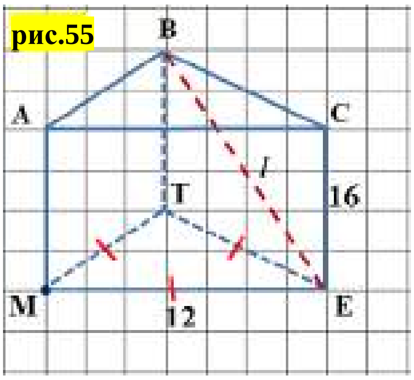
рис.51

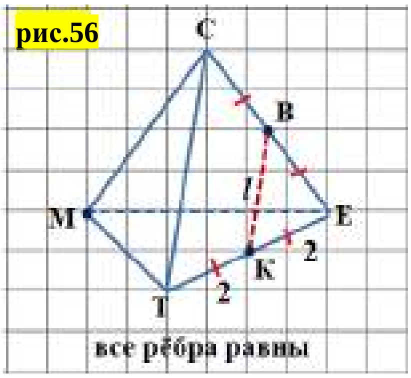
№2. Найдите расстояние между точкой М и прямой ***l***.





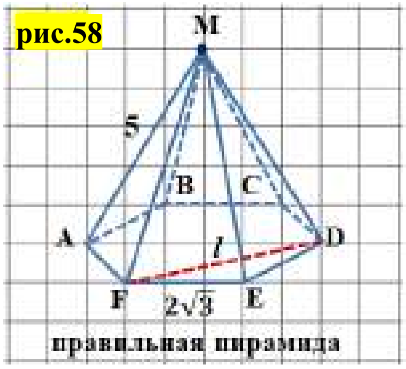


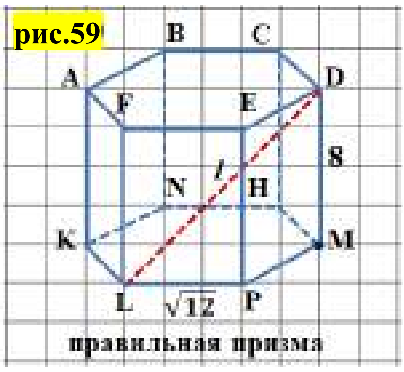




Домашнее задание

1. Найдите расстояние между точкой М и прямой ***l***.



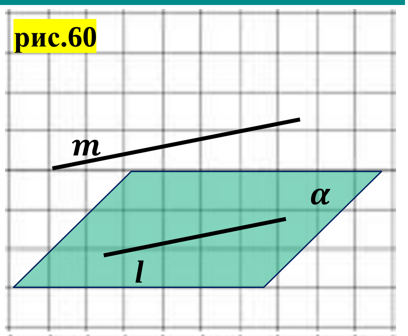


Тема 10.1 Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности

Прямая может лежать в плоскости, пересекать плоскость или быть параллельной плоскости. Сформулируем признак параллельности прямой и плоскости:

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Сколько прямых, параллельных к плоскости можно провести через точку, не лежащую на ней? Обоснуйте свой ответ.



№1. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$.

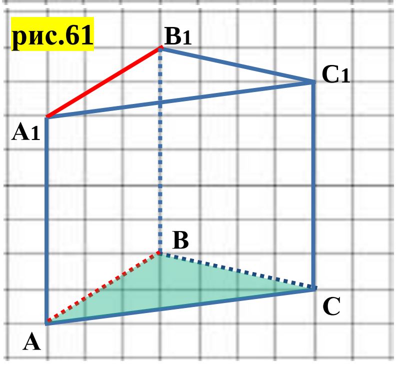
а) доказать, что прямая A_1B_1 параллельна плоскости (АВС);

Приведём доказательство:

Прямая АВ лежит в плоскости (АВС), а прямая A_1B_1 параллельна прямой АВ, т.к. ABB_1A_1 – прямоугольник. Следовательно, A_1B_1 параллельна (АВС).

б) докажите самостоятельно, что AA_1 параллельна (BB_1C_1);

в) выпишите ещё два примера параллельных прямой и плоскости в этой призме. Обоснуйте их выбор.



№2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что прямая AA_1 параллельна плоскости (BCC_1).

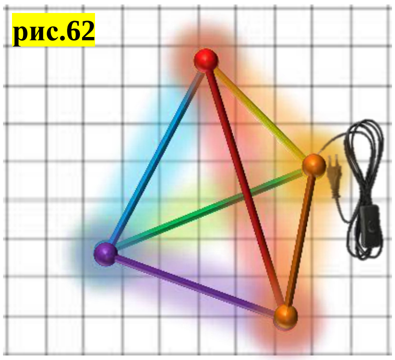
№3. В правильной треугольной пирамиде MABC рёбра основания равны 12, высота равна 4. На ребре AM лежит точка P так, что AP=6, на ребре AB точка K так, что KB=3.
а) докажите, что прямая PK параллельна плоскости (BCM);
б) найдите расстояние от точки A до прямой PK.

№4. Через точки A, B_1, C_1, D правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость β. Точка K – середина CC_1, точка O – центр квадрата ABCD.
а) докажите, что прямая OK параллельна плоскости β;
б) найдите длину отрезка OK, если ребра основания равны $\sqrt{32}$, а боковые рёбра равны 6.

Домашнее задание

1. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ребро основания равно 4, боковое ребро равно 8.
а) докажите, что прямая AB параллельна плоскости (CFF_1);
б) найдите длину большей диагонали призмы.

2. Ваня делает подарок своими руками – светильник в форме правильной треугольной пирамиды, составленной из шести пластиковых трубок. Длина каждой трубки равна 30см. Поместится ли такой светильник на полочку, если её высота равна 26см (рис.62)? Свой ответ обоснуйте.

рис.62


Тема 10.2 Параллельность прямой и плоскости. Решение задач

№1. Истинным или ложным является утверждение?
а) в треугольной пирамиде никакое ребро не параллельно грани;
б) в кубе каждое ребро параллельно сразу трём граням;
в) если каждая из двух прямых параллельна одной плоскости, то эти прямые параллельны;
г) две скрещивающиеся прямые могут быть параллельны одной плоскости.

№2. В основании пирамиды SABCD лежит четырёхугольник ABCD, BC=2, AD=8, и AB=CD=5. Точки M и K – середины рёбер AB и CD, $\angle CAD = \angle BCA$.
а) докажите, что прямая MK параллельна плоскости (BCS);
б) найдите расстояние между прямыми MK и BC.

№3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, в которой через точки A, E, F_1 проходит плоскость β. Точка K – середина ребра BB_1, точка P – середина ребра BC.
а) докажите, что прямая KP параллельна плоскости β;
б) найдите длину большей диагонали призмы, если ребро основания равно 12, а высота призмы 7.

№4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точка K – середина CC_1, точка P – середина AA_1.
а) докажите, что прямая PD_1 параллельна плоскости (BKD);
б) найдите расстояние от точки A до прямой PD_1.

Домашнее задание

1. ABC – треугольник, в котором AB=BC, и проведена высота BH. Точка K не лежит в плоскости этого треугольника. Точка P делит сторону BC в соотношении 2:1, считая от B. Точка T делит сторону AC в соотношении 5:1, считая от A. Докажите, что прямая PT параллельна плоскости KBH.

2. В треугольник ABC вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны AC в точке M, причём AM=8 и CM=12.
а) докажите, что треугольник ABC прямоугольный;
б) найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Тема 10.3 Параллельность прямой и плоскости. Закрепление материала

№1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра AB и BC перпендикулярны, ребро AA_1 в 2 раза больше ребра AB, $\angle BAC=60°$. Точка P лежит на ребре AC так, что AP=AB, точка T – середина ребра B_1C_1. Докажите, что $PT \parallel (ABB_1)$.

№2. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник со сторонами AB=4, BC=6. Высота пирамиды MO, точка O лежит внутри прямоугольника ABCD и равноудалена от точек C и D на расстояние $2\sqrt{2}$. Точка E – пересечение медиан треугольника MCD.
а) докажите, что прямая OE параллельна плоскости (ABM);
б) найдите высоту пирамиды, если $\angle OME=30°$.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – призма, основание которой – треугольник ABC с прямым углом B. Окружность построенная на AB как на диаметре пересекает AC в точке E. Точки M и K лежат на ребрах CB и CA, CK=4, CM=5, MK=3, KA=6. Докажите, что BE ∥ (MKC_1).

№4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, $AB=BC=\sqrt{8}$, $AA_1=2$. K и M – середины AA_1 и CC_1.

а) докажите, что прямая AC параллельна плоскости четырёхугольника KB_1MD;

б) найдите площадь данного четырёхугольника.

Домашнее задание

1. Около треугольника ABC описана окружность, причём AB – её диаметр, O – её центр, сторона BC равна радиусу этой окружности. Рассмотрим прямую треугольную призму $OBCO_1B_1C_1$. Пусть OH – высота в треугольнике AOC.

а) докажите, что прямая OH параллельна плоскости (BCC_1);

б) найдите расстояние от точки O_1 до прямой AC, если боковое ребро призмы равно $\sqrt{24}$, а радиус данной окружности равен 2.

2. BC – диаметр окружности. Точка A лежит на продолжении BC за точку C. Прямая AK касается окружности в точке K, AK=KB.

а) докажите, что $\angle AKB = 120°$;

б) найдите периметр треугольника OCK, если $AK=3\sqrt{10}$.

Тема 11.1 Параллельность плоскостей. Признак параллельности

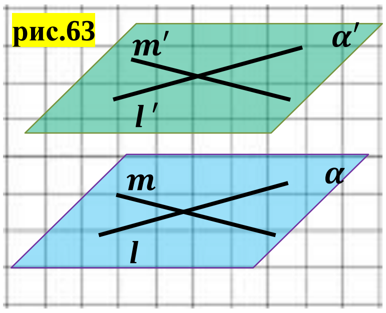
Плоскости могут совпадать, пересекаться по прямой или быть параллельными.

Параллельными называются плоскости, которые не имеют общих точек и не пересекаются.

Теперь сформулируем признак параллельности плоскостей:

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

рис.63

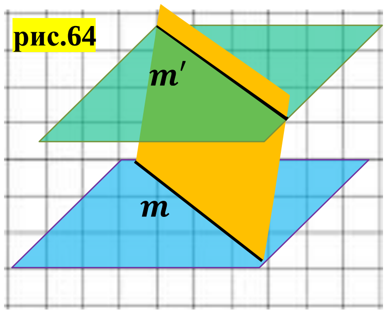


Почему не достаточно лишь одной пары параллельных прямых? Проведите мысленный эксперимент и сделайте иллюстрацию с контрпримером, в котором через одну пару параллельных прямых проходят две плоскости, но сам эти плоскости не параллельны.

Отметим так же ещё одно важнейшее свойство пары параллельных плоскостей:

Если две параллельные плоскости пересекаются с ещё одной плоскостью, то линии их пересечения являются параллельными прямыми.

рис.64



№1. Многогранник $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ является правильной шестиугольной призмой.

а) докажите, что плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ параллельны;

Приведём доказательство:

Прямые AB и BC лежат в плоскости (ABC) и пересекаются. Прямые A_1B_1 и B_1C_1 лежат в плоскости $(A_1B_1C_1)$ и пересекаются. Прямая AB параллельна A_1B_1, т.к. это – противоположные стороны прямоугольника. Так же BC параллельна B_1C_1, т.к. это – противоположные стороны прямоугольника. По признаку параллельности плоскостей (ABC) ∥ $(A_1B_1C_1)$, ч.т.д.

Используя признак параллельности плоскостей:

б) докажите, что (ABB_1) параллельна (EDD_1);

в) выпишите ещё два примера параллельных плоскостей в данной призме, свой выбор обоснуйте.

№2. Плоскости двух равных квадратов ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны. Плоскость α проходит через точки A, C и M – середину A_1B_1. В каком соотношении она разделит отрезок B_1C_1?

№3. Две трапеции ABCD и AEFD имеют общее основание AD, но не лежат в одной плоскости. MK и PT – их средние линии. Докажите, что плоскости (MKP) и (BCE) параллельны.

№4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб ABCD, AC=16, AB=10.

а) докажите, что плоскости (ABB_1) и (CDD_1) параллельны;

б) найдите площадь основания призмы.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма. Точки P и T – середины рёбер AD и AD_1 соответственно. Точка K лежит на продолжении ребра CD за точку D так, что отрезки KD=PD. Докажите, что плоскости (BDD_1) и (PKT) параллельны.

2. Плоскости равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Точка M – середина отрезка AC, точка P – середина отрезка B_1C_1. Плоскость α проходит через точки M, A_1, P. В каком соотношении она разделит отрезок BC?

Тема 11.2 Параллельность плоскостей. Решение задач

№1. Для каждого суждения определить: истина это или ложь.
а) прямая параллельна плоскости, если она параллельна двум прямым, лежащим в этой плоскости;
б) прямая и плоскость могут только пересекаться или быть параллельными друг другу;
в) если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны;
г) у призм есть грани, лежащие в параллельных плоскостях;
д) в любой пирамиде есть грани, которые параллельны;
е) две прямые, не лежащие в одной плоскости, никогда не могут быть параллельными;
ж) если плоскости параллельны, то для каждой прямой одной плоскости найдётся параллельная прямая, лежащая в другой плоскости.

№2. В треугольной пирамиде DABC точки M, P, K лежат на серединах рёбер AB, AC, AD.
а) докажите, что плоскости (BCD) и (MPK) параллельны;
б) найдите площадь треугольника MPK, если площадь треугольника BCD равна 14.

№3. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со сторонами AB=12, BC=5, AC=13. На ребре AB выбрали точку H, из которой восстановили перпендикуляры к прямой AB в плоскостях (ABC) и (ABB_1). Через эти перпендикуляры проходит плоскость β. Выполните необходимые построения.
а) докажите, что плоскость β параллельна (BCC_1);
б) найдите расстояние от точки B до прямой AC.

№4. В основании пирамиды MABCD лежит прямоугольник ABCD, AB=6, BC=9. Все боковые рёбра пирамиды равны 12. Точки K, P, T лежат на рёбрах AD, MD, CD так, что KD=3, PD=4, TD=2.
а) докажите, что плоскости (KPT) и (ACM) параллельны;
б) найдите расстояние от точки P до прямой KT.

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма, в основании которой треугольник ABC с прямым углом B. В этот треугольник вписана окружность с центром O, которая касается ребра BC в точке K. Точка T лежит на ребре B_1C_1 так, что B_1T=BK.
а) докажите, что (ABB_1) ∥ (OKT);
б) найдите OT, если AB=12, BC=16, AA_1=3.

2. В треугольнике ABC AC=2AB, проведена медиана BM и биссектриса AE, которые пересекаются в точке O.
а) докажите, что Δ BOE – прямоугольный;
б) найдите площадь фигуры ABEM, если AC=4, BC=3.

Тема 11.3 Параллельность плоскостей. Закрепление материала

№1. Дана треугольная пирамида MABC. Точка K лежит на ребре MA, точка P лежит на ребре MB, точка T лежит на ребре MC, причём ∠BKP = ∠KBA и ∠CPT = ∠PCB.
а) докажите, что плоскости (ABC) и (KPT) параллельны;
б) найдите площадь KPM, если площадь AKPB равна 30, и точки K и P – середины рёбер.

№2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция ABCD, у которой боковая сторона AB=4 перпендикулярна основаниям BC и AD, боковая сторона CD=8. Точка P лежит на ребре AD так, что ∠ABP=60°.
а) докажите, что плоскости (PBB_1) и (DCC_1) параллельны;
б) найдите площадь четырёхугольника BCDP, если точка P является серединой ребра AD.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, AB=2, BC=7, AA_1=15. Точка M лежит на ребре AD так, что отрезок AM=3, точка P лежит на ребре DD_1 так, что отрезок DP=5, точка T лежит на ребре CC_1 так, что отрезок CT=5, точка E лежит на продолжении ребра AD за точку D так, что отрезок DE=1.

а) докажите, что плоскости (MA_1B_1) и (EPT) параллельны;

б) найдите расстояние между прямыми MA_1 и PE.

№4. SABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания 18 и боковым ребром 15. Точки M и K лежат на рёбрах AB и CD так, что AM=KD=3. Точки P и T лежат на рёбрах SA и SD так, что AP=DT=5, SE и SH – апофемы, проведённые к AB и CD.

а) докажите, что плоскость четырёхугольника MPTK параллельна плоскости треугольника SEH;

б) найдите отношение площадей фигур MPTK и SEH.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M – середина AA_1, K – середина AD, P – середина CD.

а) докажите, что плоскости (AB_1C) и (MKP) параллельны;

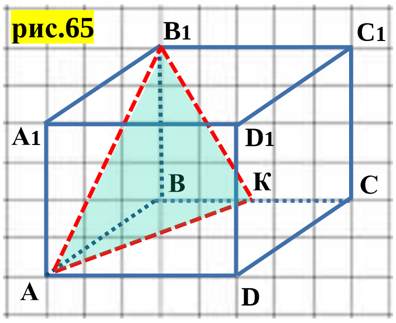
б) найдите отношение площадей сечений куба, проходящих через плоскости (AB_1C) и (MKP).

2. В трапеции ABCD сторона AB перпендикулярна основаниям BC и AD. Известно, что CD=2BC. Биссектриса острого ∠ADC пересекает AB в точке M и продолжение BC в точке E.

а) докажите, что MC=ME;

б) найдите угол MCD, если AB=$4\sqrt{3}$, CD=8.

Тема 12.1 Сечения многогранников. Понятие сечения. Простейшие сечения



Если плоскость проходит через многогранник, то её называют секущей плоскостью. Сформулируем определение:

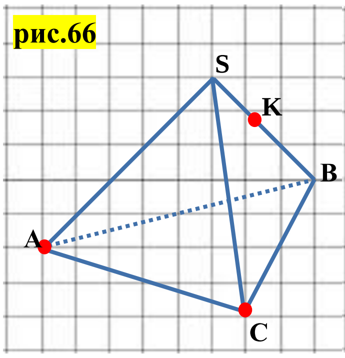
Сечение многогранника – это многоугольник, образованный пересечением его граней и рёбер с секущей плоскостью.

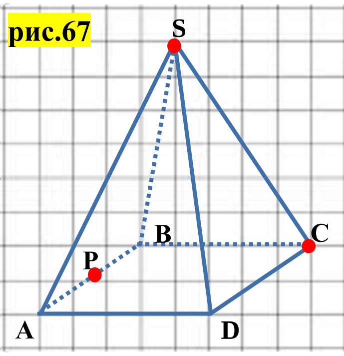
Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. Для построения сечения достаточно знать только три точки. Сначала изучим простое правило построения:

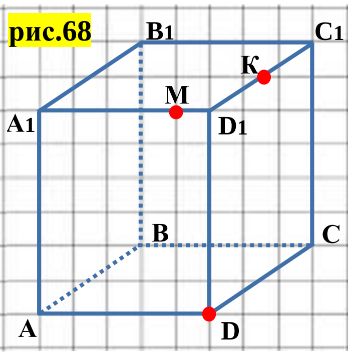
Если две точки сечения лежат на одной грани, то их можно соединить отрезком.

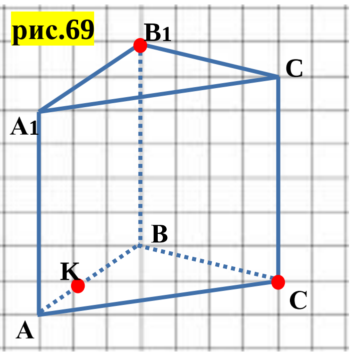
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, в котором точка K – середина ребра BC (рис. 65). Пусть требуется построить сечение, проходящее через точки A, B_1, K. Заметим, что точки A и K лежат на одной грани, соединим их отрезком. Аналогично соединим отрезками A и B_1, K и B_1. Можно закрасить или заштриховать полученный треугольник AKB_1, который и будет являться сечением.

№1. Постройте сечения по трём точкам, скопировав эти чертежи в тетрадь.









№2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 постройте сечение, проходящее через точки A, B_1, C, и найдите его площадь.

№3. В пирамиде SABCD основание – прямоугольник со сторонами 24 и 32. Все боковые рёбра равны 25. Постройте сечение, проходящее через точки A, C, S, найдите его площадь.

№4. Все рёбра треугольной пирамиды MABC равны 4. Точка T – середина ребра BC. Постройте сечение по точкам A, M, T и найдите его площадь.

№5. В пирамиде SABCD все рёбра равной длины. Точки P и T – середины рёбер AB и CD. Постройте сечение, проходящее через точки S, P, T. Найдите отношение площадей SPT и SAB.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, точка К – середина ВС. АВ=8, ВС=12, BB_1=8. Постройте сечение, проходящее через А, К, B_1 и найдите его площадь.

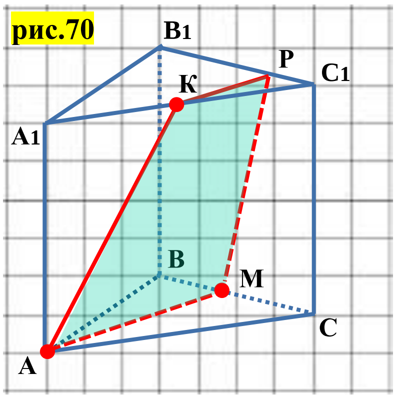
б) найдите отношение площадей сечений куба, проходящих через плоскости (AB_1C) и (МКР).

2. В пирамиде МАВС основанием является треугольник АВС с прямым углом А. Известно, что АВ=15, ВС=39. Точки Р, К, Т – середины рёбер МА, МВ, МС. Постройте сечение, проходящее через точки Р, К, Т и найдите его площадь.

Тема 12.2 Сечения многогранников. Сечения и параллельность

Что делать, если точки не лежат на одной грани, а нам необходимо построить сечение?

На параллельных гранях сечение проходит по параллельным прямым.



Рассмотрим ещё ситуацию (рис. 70). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки К и М – середины рёбер A_1C_1 и ВС соответственно. Построить сечение, проходящее через А, К, М.

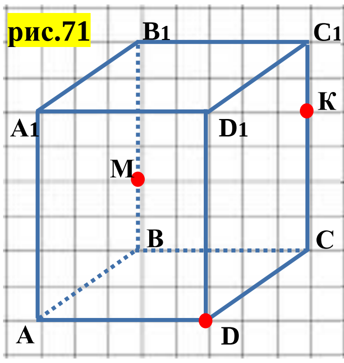
Заметим, что точки А и М лежат на одной грани, соединим их. Так же точки А и К лежат на одной грани, соединим их. Но точки К и М не лежат на одной грани и соединять их нельзя. Пользуемся вторым правилом.

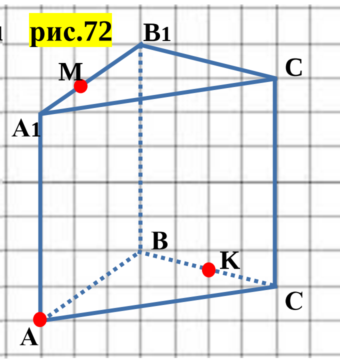
Плоскости (АВС) и ($A_1B_1C_1$) параллельны, значит, сечение пересекает их по параллельным прямым. Из точки К проводим прямую, параллельную АМ. Она пересекает ребро B_1C_1 в точке Р. Четырёхугольник АМРК – наше искомое сечение (определите вид этого четырёхугольника).

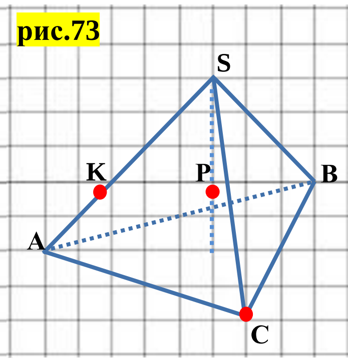
Неизвестным остаётся геометрическое место точки Р. Поскольку АМ параллельна КР, треугольники АМС и KPC_1 подобны по двум углам. Исходя из условий задачи, коэффициент их подобия равен 2.

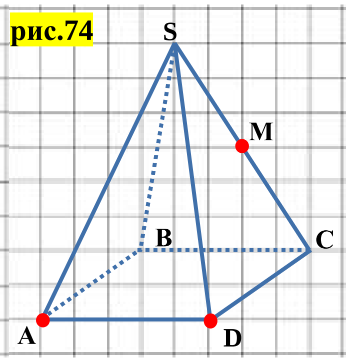
Отрезок PC_1 вдвое меньше отрезка МС и составляет четверть от ребра B_1C_1. Тогда о точке Р можно сказать, что она делит ребро B_1C_1 в соотношении 3:1, считая от вершины B_1.

№1. Постройте сечение по трём отмеченным точкам, используя свойства параллельности.









№2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, АВ=9, ВС=12, CC_1=4. Постройте сечение, проходящее через точки А, С, C_1 и найдите его площадь.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. АВ=ВС=6, AA_1=18. Точка К лежит на CC_1 так, что СК=12. Точка М лежит на BB_1 так, что ВМ=3. Докажите, что сечение, проходящее через точки D, К, М делит ребро АВ в соотношении 1:3.

№4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Постройте сечение, проходящее через точки А, B_1, C_1. Найдите отношение площади грани куба к площади этого сечения.

№5. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 12 и боковым ребром $\sqrt{12}$. Точка К – середина ВС. Постройте сечние по точкам А, A_1, К и найдите его площадь.

Домашнее задание

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины рёбер АВ=8, ВС=6, AA_1=5. Постройте сечение, проходящее через точки А, A_1, C_1 и найдите площадь этого сечения.

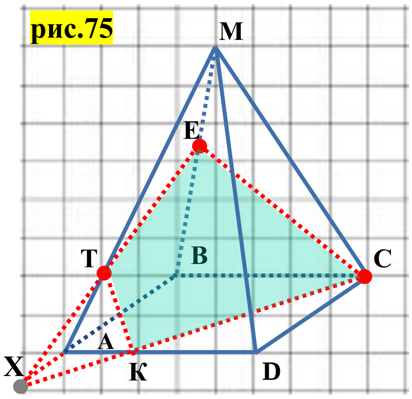
2. Ребро основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно $3\sqrt{2}$, высота призмы равна 6, точка К – середина ребра AA_1.

а) докажите, что сечение, проходящее через точки К, С, B_1 – прямоугольный треугольник;

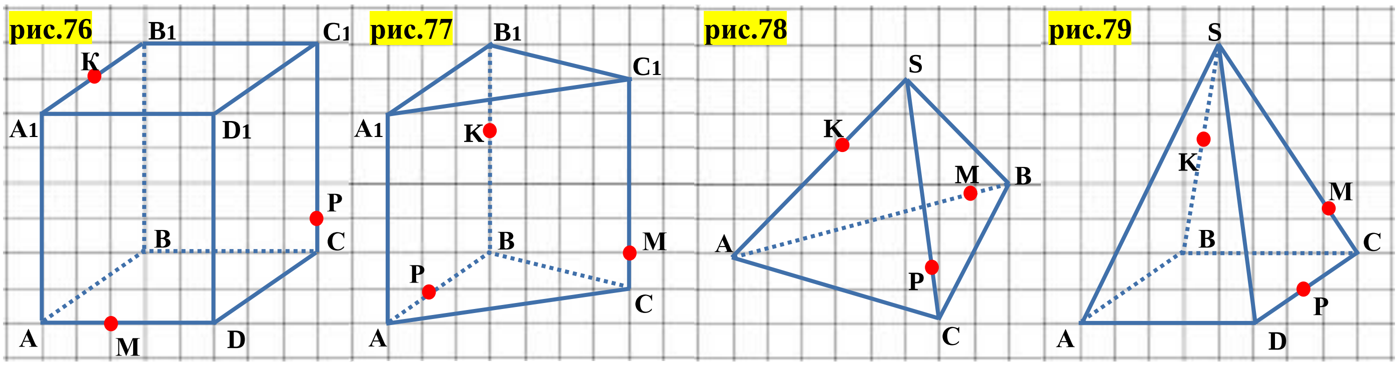
б) найдите $\angle KB_1C$.

Тема 12.3 Сечения многогранников. Сечения более сложного уровня

Иногда при построении сечений необходимы дополнительные приёмы. Рассмотрим четырёхугольную пирамиду MABCD (рис.75). Точка T лежит на AM, точка E лежит на BM. Необходимо построить сечение, проходящее через точки T, E, C. Заметим, что можно сразу соединить E и T, а также E и C. Заметим, что точка C лежит в плоскости основания, а прямая ET пересечёт эту плоскость на продолжении ребра AB в точке X, которая так же лежит в плоскости основания. По правилу 1 её можно соединять с точкой C. По ходу соединения X и C мы пересечём ребро AD в некоторой точке K. Тогда, соединив T и K, получаем искомое сечение ETKC.



№1. Перенесите в тетрадь чертежи и постройте сечения по данным точкам.



№2. Для сечения, полученного на рисунке 79 известно, что BK=10, KS=5, CM=5, CD=12. Точка P – середина ребра CD. Определите соотношение, в котором плоскость сечения делит ребро AD, если данная пирамида – правильная.

№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точки K и M – середины CD и CC_1. Плоскость проходит через точки A, K, M.

а) докажите, что плоскость содержит точку B_1;

б) найдите расстояние от точки K до прямой AB_1.

№4. $ABCA_1B_1C_1$ – призма, AB=BC=20, AC=14, AA_1=24. Точка M – середина AC. Плоскость сечения содержит прямую A_1B_1 и проходит через точку M.

а) докажите, что данное сечение – трапеция;

б) найдите площадь данного сечения.

Домашнее задание

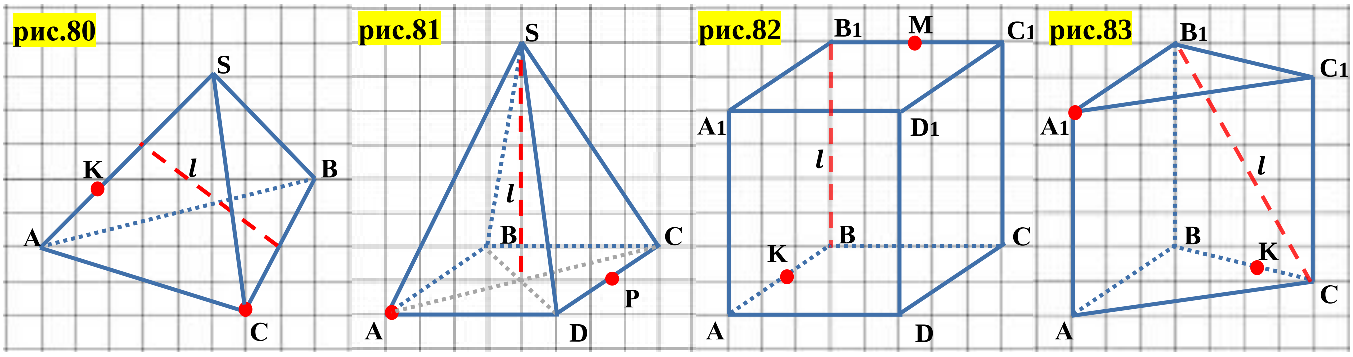
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма с ребром основания 3 и боковым ребром 9. Точка T лежит на ребре CD так, что CT=1, точка K лежит на ребре CC_1 так, что CK=3. Постройте сечение призмы плоскостью (TKB_1). Докажите, что это сечение содержит точку A.

2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 18 и боковым ребром 20. Точка K – середина BC. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки A, K и параллельно прямой BC_1. Докажите, что данное сечение делит ребро AB в соотношении 1:2.

Тема 12.4 Сечения многогранников. Сечение по двум точкам и параллельно прямой

Другой способ построения сечений – по двум данным точкам и параллельно данной прямой. Суть метода заключается в том, чтобы самостоятельно получить третью точку.

№1. Постройте сечение, проходящее через две данные точки и параллельно прямой.



№2. Для рисунка 82 основание призмы является ромб с углом B = 120°, К и М – середины сторон этого ромба, а его периметр равен $8\sqrt{3}$. Высота призмы равна 5. Найдите площадь сечения.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная призма с ребром основания 3 и боковым ребром 6. Точка К лежит на ВС так, что ВК=2. Постройте сечение, проходящее через точки А, К, и параллельно прямой B_1C. Найдите все стороны этого сечения.

№4. SABC – пирамида, AS=AB=CS=CB=10, SB=AC=12. Точка М лежит на ребре АВ так, что ВМ=2. Плоскость α проходит через точку М параллельно прямым АС и BS.

а) докажите, что сечение плоскостью α – параллелограмм;

б) найдите отношение площадей фигур, на которые эта плоскость делит грань SCB.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка Т – середина DD_1. Постройте сечение, проходящее через точки А, Т и параллельно прямой BD. Найдите его площадь, если ребро куба равно 2.

2. SABC – правильная треугольная призма, все рёбра которой равны 3. Точка К лежит на ребре SA так, что АК=2. Постройте сечение, проходящее через точки С, К и параллельно прямой SB.

Тема 13.1 Подведение итогов по главе. Решение различных задач на повторение

№1. Две окружности касаются внешним образом в точке К, через которую проведена их общая касательная. На касательной взята точка А, из которой к первой окружности проведена касательная в точку В, ко второй окружности – в С. Прямая ВС пересекает первую окружность в точке М, вторую – в точке Т.

а) докажите, что $\angle BKM = \angle CKT$;

б) пусть АК=$2\sqrt{3}$, $\angle BAC = 120°$, МТ=1, найдите расстояние между центрами окружностей.

№2. Рёбра основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1D_1C_1D_1$ равны 6, боковые рёбра равны 12, точка К – середина ребра BB_1.

а) построить сечение, проходящее через точки А, С, К;

б) доказать, что плоскость (АСК) параллельна DB_1;

в) найти площадь данного сечения.

№3. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD ребро основания равно 10, высота равна $\sqrt{119}$. Точка О – центр основания, точки К и Р – середины рёбер SB и SC.

а) постройте сечение, проходящее через точки О, К, Р;

б) докажите, что плоскости (ADS) и (ОКР) параллельны;

в) найдите длину бокового ребра пирамиды.

№4. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, рёбра которой АВ=10, ВС=6, АС=8, AA_1=12, точка К – середина ребра CC_1, точки Р и М лежат на A_1C_1 и B_1C_1 так, что отрезки PC_1=4, MC_1=3.

а) построить сечение, проходящее через точки А, В, К;

б) доказать, что плоскость сечения параллельна прямой МР;

в) найти площадь данного сечения.

Домашнее задание

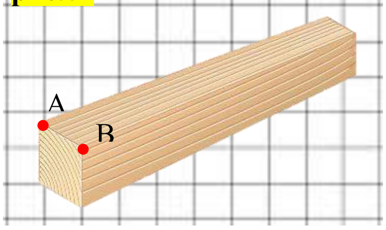
1. Длина деревянного бруса 63см, поперечное сечение – квадрат со стороной 16см.

а) Покажите как от края бруса через точки А и В отпилить кусок, чтобы площадь грани на месте распила была 320см^2.

б) Как отпилить кусок, чтобы площадь грани на месте распила была вдвое больше площади квадрата?

в) Какая наибольшая площадь у такой грани может быть?

рис.84



2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма. Точка Е лежит на продолжении ребра CC_1 за точку C_1 так, что $CC_1=C_1E$. Точка К – середина ребра B_1C_1.

а) постройте сечение призмы плоскостью (АКЕ);

б) докажите, что (АКЕ) ∥ A_1B_1.

3. Окружность с центром О касается отрезка АВ в точке К – его середине, и касается отрезка ВС в точке М, причём МС : МВ = 1 : 2.

а) докажите, что $\angle OAB = \angle OBC$;

б) найдите ОС, если радиус окружности $\sqrt{7}$, и $\angle ABC = 60°$.

Тема 13.2 Подведение итогов по главе. Решение различных задач на повторение

№1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма ребро основания равно 6, высота равна 12. Точка К лежит на AA_1 так что АК=8. Точка М лежит на ребре АВ так что отрезок АМ=4.

а) докажите, что прямые МК и CD_1 параллельны;

б) постройте сечение, проходящее через точки К, М, С;

в) найдите наибольшую из диагоналей этого сечения.

№2. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, в основании которой равнобедренный треугольник АВ=ВС, $\angle ABC=30°$, точки К и М лежат на рёбрах АВ и ВС так, что $\angle KMB=75°$.

а) докажите, что прямые МК и A_1C_1 параллельны;

б) постройте сечение, проходящее через точки К, A_1, C_1;

в) найдите расстояние от точки А до прямой ВС если ВС=8;

г) найдите отношение площадей граней АВС и BCC_1B_1, если высота призмы равна 8.

№3. $ABCDA_1D_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма с ребром основания 4 и боковым ребром 6, точки К и М лежат на рёбрах BB_1 и CC_1 так, что $BK:KB_1 = 2:1$, $CM:MC_1 = 1:2$, точка Т – середина AD.

а) постройте сечение, проходящее через точки К, М, Т;

б) найдите отношение, в котором сечение делит ребро CD.

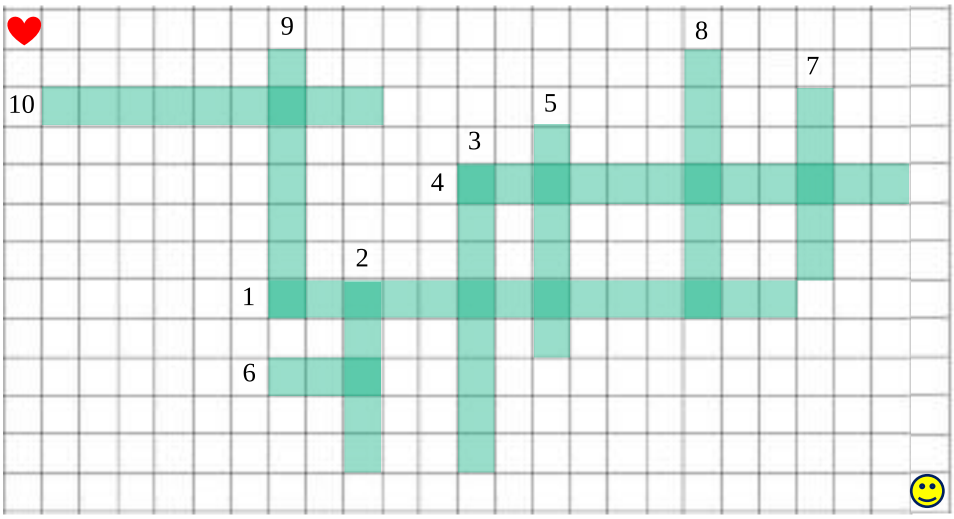
№4. В треугольнике АВС АВ=ВС медиана АМ. В треугольнике АМС проведена медиана МК.

а) докажите, что $\angle BAM = \angle AMK$;

б) найдите АМ, если около четырёхугольника АВМК можно описать окружность, и МК=$\sqrt{3}$.

Домашнее задание

1. Кроссворд. Перенесите сетку ответов в тетрадь, вопросы переписывать не нужно.



1. Две прямые, не пересекающиеся и не лежащие в одной плоскости.
2. Отрезок, соединяющий две соседние вершины многогранника.
3. Сумма длин всех сторон многоугольника.
4. Две плоскости, которые не имеют общих точек.
5. Линия пересечения двух плоскостей.
6. Параллелепипед, у которого все грани квадратные.
7. Точка пересечения диагоналей квадрата.
8. Многоугольник, который образуется при пересечении многогранника с плоскостью.
9. В прямоугольном треугольнике отношение противолежащего катета к прилежащему катету.
10. Отрезок, соединяющий вершины многогранника, не лежащие на одной грани.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед с рёбрами АВ=4, ВС=12, его диагональ $B_1D=13$. Точка К лежит на ребре C_1D_1 так, что отрезок $C_1K=1$, точка Р лежит на ребре ВС так, что отрезок РС=3.

а) постройте сечение, проходящее через точки А, С, К;

б) докажите, что эта плоскость параллельна прямой PC_1;

в) найдите длину меньшей из диагоналей сечения;

г) пусть плоскость сечения пересекает прямую DD_1 в точке М, найдите высоту пирамиды MACD с вершиной М.

Тема 13.3 Подведение итогов по главе. Решение различных задач на повторение

№1. MABC – правильная треугольная пирамида, все рёбра которой равны. Точка К – середина АС, точка Е делит высоту пирамиды МО в соотношении 2:1, считая от М.

а) постройте сечение пирамиды плоскостью (АЕС);

б) найдите соотношение, в котором сечение делит ребро МВ. Используйте теорему Менелая.

№2. Основание треугольной пирамиды МАВС – прямоугольный треугольник АВС с прямым углом В. Ребро МВ перпендикулярно к плоскости основания. Точки Р и Т – середины рёбер МВ и АС. Точка К делит ребро МС в соотношении 1:2,

считая от М. Через точки К, Р, Т провели плоскость.

а) докажите, что эта плоскость делит АВ в соотношении 1:2;

б) найдите АС, если МК=3, МР=4, АВ=6. Используйте теорему Менелая.

№3. У треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6.

Точка К – середина B_1C_1, точка М лежит на ребре A_1C_1 так, что $A_1M = 1$. Через точки А, М, К провели плоскость.

а) докажите, что плоскость делит ВС в соотношении 2:3;

б) найдите длину отрезка МК.

№4. Дан треугольник АВС с прямым углом В, ВС=9, АВ=12. Проведена медиана АМ и биссектриса СЕ. Окружность описана около треугольника АВС. Продолжение прямой СЕ пересекает окружность в точке Т.

а) докажите, что ВЕ=ВМ;

б) найдите СТ.

Домашнее задание

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 6 точка К расположена на A_1B_1 так, что $A_1K:KB_1 = 2:1$, точка Т – середина AD, точка Р – середина CC_1. Плоскость сечения проходит через точки К, Т и параллельно прямой DP.

а) докажите, что эта плоскость делит ВС в соотношении 7:1;

б) пусть точка Е лежит на ребре ВС так, что $BE = \frac{9}{4}$, докажите, что прямая АЕ параллельна плоскости сечения.

2. В ΔABC угол А – прямой. На стороне АВ отмечена точка К так, что АК=АС. На продолжении АС за точку А точка М, АМ=АВ. В ΔABC и ΔAKM проведены высоты АН и AN.

а) докажите, что прямые АН и AN перпендикулярны;

б) пусть $CK \cap MB = E$, найдите КЕ, если АВ=5, АС=2.

Тема 14.1 Теорема косинусов и аркфункции. Задача поиска угла на плоскости

Важнейшая теорема о связи сторон и углов треугольника.

Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\varphi)$$

Первое применение теоремы – поиск неизвестной стороны.

Второе – поиск неизвестного угла треугольника. На этом остановимся подробнее. Если мы знаем три стороны треугольника, то можно найти и любой из его углов по косинусу.

$$\cos(\varphi) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

В этой формуле a, b – стороны, образующие угол, c – противолежащая сторона. Рассмотрим пример: в треугольнике АВС стороны АВ=5, ВС=8, АС=7. Найти ∠АВС.

Пользуясь следствием из теоремы косинусов, получаем:

$\cos(\angle ABC) = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$. Из таблицы значений тригонометрических функций видим, что косинус равен $\frac{1}{2}$ для угла 60°.

Пробуем найти другой угол этого треугольника:

$\cos(\angle BCA) = \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$. Но данное значение косинуса угла не является табличным. Чтобы записать угол, косинус которого равен этому числу, надо использовать обратную тригонометрическую функцию – арккосинус.

Арккосинусом числа a называют такой угол φ, для которого верно равенство $\cos\varphi = a$. Записывают такой угол следующим образом: $\arccos(a)$.

Итак, ответ к нашей задаче: $\angle BCA = \arccos\left(\frac{11}{14}\right)$.

Вместе с тем, есть и другие обратные тригонометрические функции – арксинус, арктангенс, арккотангенс. Их определения и форма записи будет аналогичной. Более того, один и тот же угол может быть определен и записан разными обратными тригонометрическими функциями.

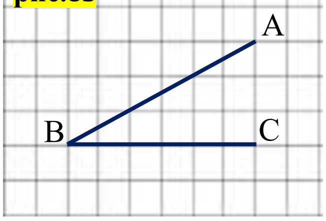


рис.85

На рисунке 85 изображён угол на листке в клетку. Найдём его величину. Получим треугольник ABC – прямоугольный. В нём катеты BC=6, AC=3, гипотенуза AB=$3\sqrt{5}$.

Тогда $\sin(B) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(B) = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $tg(B) = \frac{1}{2}$, $ctg(B) = 2$. Сам угол можно выразить любым из четырёх способов: Например, $\angle ABC = arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Подумайте, какой функцией быстрее всего было воспользоваться в этой задаче?

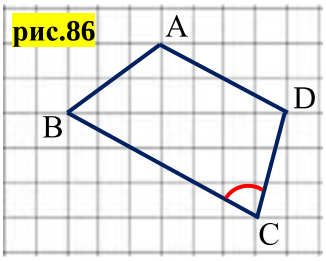


рис.86

№1. В треугольнике ABC угол A – прямой. AB=4, BC=6. Выразите угол C тремя различными способами.

№2. В треугольнике ABC угол A – прямой. AB=8, BC=2. Выразите угол B тремя различными способами.

№3. В треугольнике ABC AB=BC=20, AC=24. Выразите угол A и угол B через арккосинус.

№4. На листке в клетку найдите отмеченный угол (рис.86).

№5. В трапеции ABCD AB=CD=20, BC=2, AD=26. Выразите угол A и угол B через арккосинус.

Домашнее задание

1. В треугольнике ABC AB=8, BC=10, AC=12. Найдите каждый из углов треугольника.

2. В треугольнике ABC угол A – прямой. AB=15, BC=8. Выразите угол B тремя различными способами.

Тема 14.2 Теорема косинусов и аркфункции. Задача поиска угла в пространстве

№1. Рёбра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ AB=$\sqrt{5}$, BC=$\sqrt{21}$, AC=7. Высота призмы 2. Найдите $\angle A_1BC_1$.

№2. В треугольной пирамиде MABC основание – треугольник ABC с прямым углом B, AB=CB=1, AM=$\sqrt{17}$, CM=5. Найдите ∠ACM.

№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 найдите угол между прямыми A_1B и AK, где K – середина BB_1.

№4. В пирамиде MABCD основание – прямоугольник со сторонами AB=24, BC=32, боковые рёбра равны 40. Найдите угол между высотой пирамиды и боковым ребром.

№5. Дана правильная треугольная пирамида MABC все рёбра которой равны $6a$. Найдите угол между её высотой и боковым ребром.

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма, AB=5, BC=19, CC_1=12, AC_1=20. Найдите ∠BAC.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, AB=1, BC=$\sqrt{6}$, AA_1=$\sqrt{3}$. Через точки A, B_1, C проходит плоскость сечения.

а) докажите, что $\angle AB_1C = 60°$;

б) найдите площадь сечения.

Тема 14.3 Теорема косинусов и аркфункции. Закрепление материала

№1. Найдите угол между диагоналями куба.

№2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB=5, BC=$\sqrt{23}$, AA_1=4. Найдите $\angle A_1CA$.

№3. Катеты прямоугольного треугольника относятся друг к другу, как 1:$\sqrt{3}$. Найдите острый угол между его гипотенузой и медианой, проведённой к ней.

№4. SABC – правильная пирамида, ребро основания равно 2, боковое ребро $\sqrt{6}$. Найдите угол между двумя апофемами пирамиды.

№5. В основании пирамиды SABC лежит треугольник с прямым углом B, AB=BC=8, ребро SB=$2\sqrt{2}$ является высотой пирамиды. Точка K – середина AC. Найдите ∠BKS

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 2. Точка M – середина B_1C_1. Найдите ∠AMD.

2. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ треугольник ABC, AB=BC=10, AC=16, AA_1=12. Найдите угол AB_1K, где K – середина AC.

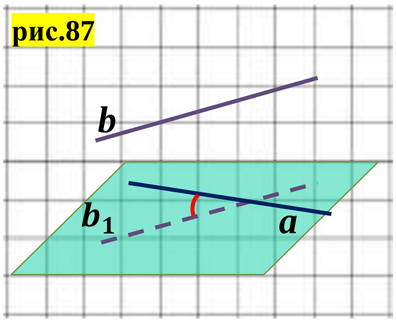
Тема 15.1 Угол между скрещивающимися прямыми. Принцип поиска угла

Вспомним утверждение:

Секущая пересекает каждую из двух параллельных прямых под одним и тем же углом.

Пусть прямая *a* лежит в некоторой плоскости, а прямая *b* является скрещивающейся с прямой *a*. Тогда угол между данными прямыми будет равен углу между прямой *a* и прямой b_1, которая лежит с ней в одной плоскости и параллельна прямой *b* (рис.87). Поэтому, для поиска угла между скрещивающимися прямыми, можно одну из них заменить на параллельную ей прямую.

рис.87



№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми:

а) A_1B и C_1D_1; б) AD_1 и B_1C; в) AB_1 и BC_1.

№2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, все рёбра которой равны. Найдите угол между прямыми:

а) AC и A_1B_1; б) AA_1 и B_1C_1; в) AA_1 и BC_1.

№3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны. Найдите угол между:

а) AB и E_1F_1; б) AB и D_1E; в) AB и A_1C_1.

№4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина CC_1, точка O – центр квадрата ABCD. Найдите угол между прямыми:

а) OB_1 и C_1D; б) AC и DK; в) DB_1 и AD_1.

Домашнее задание

1. MABCD – пирамида, основание которой – прямоугольник со сторонами AB=4, BC=$4\sqrt{3}$. Точки P и K – середины рёбер MC и MD. Найдите угол между прямыми AD и PK.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P и K – середины рёбер AA_1 и A_1B_1. Найдите угол между прямыми PK и CD.

Тема 15.2 Угол между скрещивающимися прямыми. Решение задач

№1. В треугольной пирамиде MABC все рёбра равны, точки K и P – середины рёбер MC и BC, точка O – центр треугольника ABC. Найдите угол между прямыми:

а) AM и KP; б) PM и AB; в) OM и CB.

№2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с рёбрами AB=4, AA_1=3, точка K лежит на AA_1 так, что $AK = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Точки M и P – середины AB и CB. Найдите угол между:

а) AA_1 и CB_1 б) BC и AB_1 в) MP и CK.

№3. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD рёбра основания равны $2\sqrt{3}$, боковые рёбра равны 4, точки K, P – середины MC и MD, найдите угол между прямыми:

а) AB и CM б) PK и AC

№4. Рёбра основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 4, боковые рёбра 9. Точка T лежит на CC_1 так, что CT=6. Точка K лежит на CC_1 так, что CK=3.

а) докажите, что прямая AT параллельна плоскости (BKD);

б) найдите угол между прямыми AT и A_1C_1.

Домашнее задание

1. MABC – треугольная пирамида. Точки P и K – середины рёбер MB и CB. Известно, что AM=15, AC=13, PK=4. Найдите угол между прямыми AM и PK.

2. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма с рёбрами AB=BC=AA_1=4, AC=$4\sqrt{3}$. Точка T – середина ребра AC. Докажите, что угол между прямыми A_1C и CB равен 30°;

Тема 15.3 Угол между скрещивающимися прямыми. Решение более сложных задач

№1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны $2\sqrt{2}$. Точка O – центр грани BCC_1B_1. Найдите угол между прямыми OA_1 и AB.

№2. В треугольной пирамиде MABC все рёбра равны, К – середина MC, найдите угол между MC и высотой пирамиды.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, в котором AB:BC = 3:2, а угол между B_1C и AA_1 равен 30°.

а) докажите, что $AB + BC = A_1C$;

б) найдите расстояние от точки D до прямой A_1C, если AB=6.

№4. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма. Точка E – середина AA_1. Прямые B_1E и AB пересекаются в точке T. Найдите угол между прямыми CT и A_1B_1.

№5. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, рёбра основания равны 6, боковые рёбра равны 9. Найдите угол между прямыми BE_1 и C_1D.

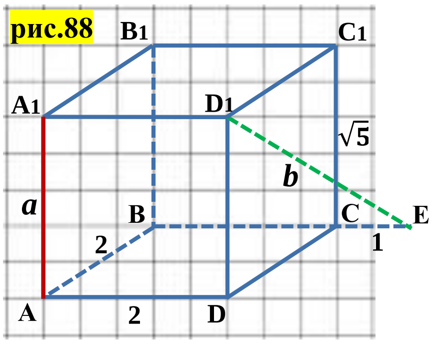
Домашнее задание

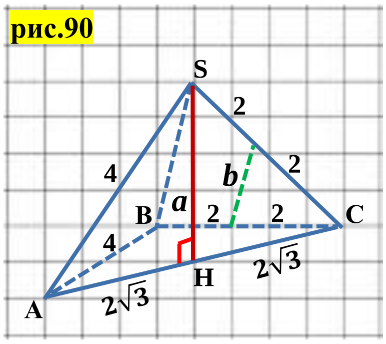
1. SABCD – правильная пирамида с ребром основания 6 и боковым ребром $6\sqrt{2}$. Точка M – середлина ребра BS. Найдите угол между прямыми MD и SC.

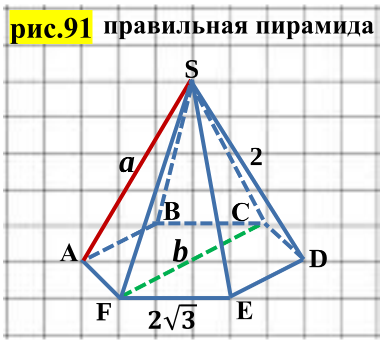
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка O – центр грани ABB_1A_1. Найдите угол между OD и A_1C.

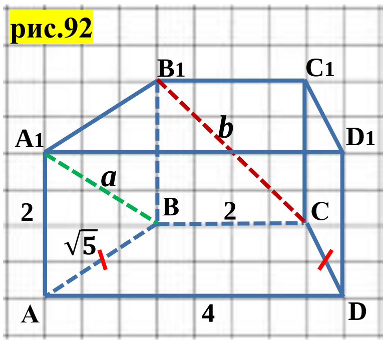
Тема 15.4 Угол между скрещивающимися прямыми. Закрепление материала

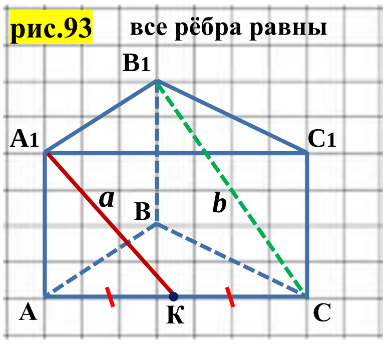
№1. На готовых чертежах найдите угол между прямыми *a* и *b*.





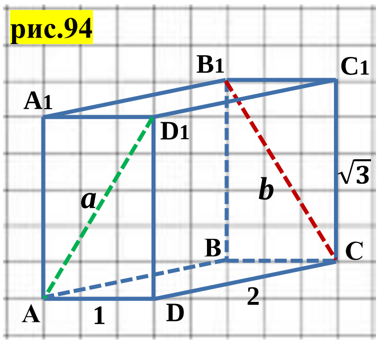


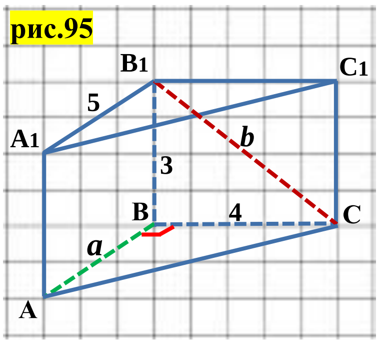




Домашнее задание

1. На готовых чертежах найдите угол между прямыми *a* и *b*.





Тема 16.1 Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности

Сначала определим понятия:

Прямая перпендикулярная плоскости – это прямая, перпендикулярная каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикуляр – кратчайшее расстояние от некоторой точки до плоскости.

Ортогональная проекция точки на плоскость – это точка, которая является основанием перпендикуляра, проведённого из неё на данную плоскость.

Признак перпендикулярности:

Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым в этой плоскости.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и вторая прямая тоже перпендикулярна этой плоскости.

рис.96

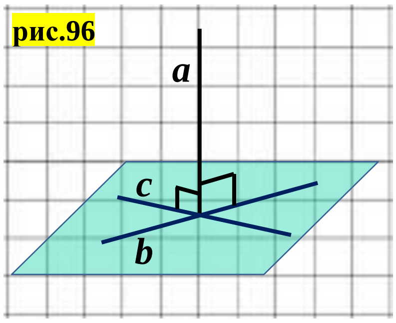
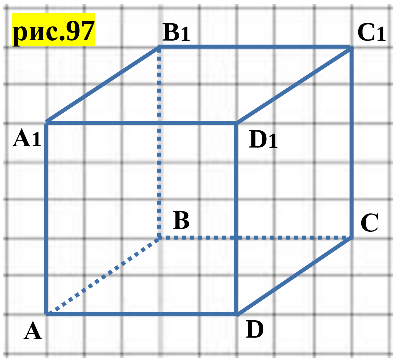


рис.97



№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что:

а) AB перпендикулярна (BCC_1);

Приведём доказательство:

Прямые BB_1 и BC пересекающиеся и обе лежат в плоскости (BCC_1), причём $AB \perp BB_1$ и $AB \perp BC$ (как стороны квадрата). Из этого следует, что $AB \perp (BCC_1)$, ч.т.д.

б) докажите самостоятельно, что $A_1C_1 \perp (BB_1D_1)$.

№2. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина AC.

а) докажите, что прямая AA_1 перпендикулярна плоскости (ABC);

б) докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости (ACC_1).

№3. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ высота $MO=2$, ребро основания равно 6. Точка K лежит на ребре MB так, что $BK=2$, точка P лежит на отрезке BO так, что $BP=\sqrt{3}$.

а) докажите, что прямая PK перпендикулярна (ABC);

б) найдите $\angle KBP$.

Домашнее задание

1. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник с прямым углом B, из которого на сторону AC проведена медиана BM. Докажите, что $BM \perp (ACC_1)$.

2. $MABC$ – треугольная пирамида, у которой ребро MC перпендикулярно плоскости основания, $AB=\sqrt{20}$, $BC=2$, $AC=4$. Докажите, что $AC \perp (BCM)$.

Тема 16.2 Перпендикулярность прямой и плоскости. Решение задач

№1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ рёбра основания равны $3\sqrt{2}$, боковые рёбра равны 6.

а) докажите, что прямая AC перпендикулярна (BDS);

б) найдите площадь сечения плоскостью (BDS).

№2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, основание $ABCD$ – прямоугольная трапеция с большей боковой стороной CD и меньшим основанием BC. В трапецию вписана окружность радиуса 2, касающаяся стороны CD в точке K так, что $CK=1$, $KD=4$.

а) докажите, что $OK \perp (DCC_1)$;

б) найдите угол между прямыми CD и A_1D_1.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, $AB=BC=26$, $AC=48$, $BB_1=4$. Точка E делит медиану BM основания ABC в соотношении 1:4, считая от B. Сечение проходит через A_1, C_1, E.

а) докажите, что $B_1E \perp (A_1C_1E)$;

б) найдите угол между прямыми AA_1 и B_1E.

Домашнее задание

1. В призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра $AB=2\sqrt{2}$, $BC=1$, $AC=3$, $AA_1=2$.

а) докажите, что прямая AB перпендикулярна (BCC_1);

б) найдите расстояние от точки B до прямой AC.

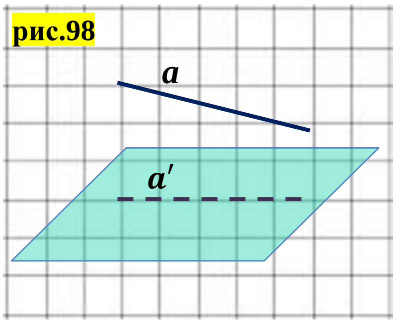
2. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник, AB=4, BC=SA=5, SB=3, SC=$\sqrt{34}$.
а) докажите, что SB – высота пирамиды;
б) найдите ∠BDS.

Тема 17.1 Проекция прямой на плоскость. Понятие проекции

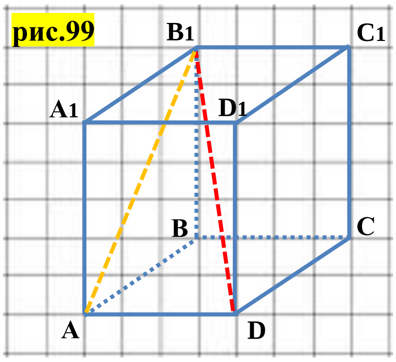
Мы уже познакомились с понятием ортогональной проекции точки на плоскость. Теперь перейдём к прямым.

Наклонная – это любая прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная ей.

Если каждую точку наклонной спроецировать на плоскость, то полученное множество точек образует прямую, которая будет являться её проекцией (рис.98).

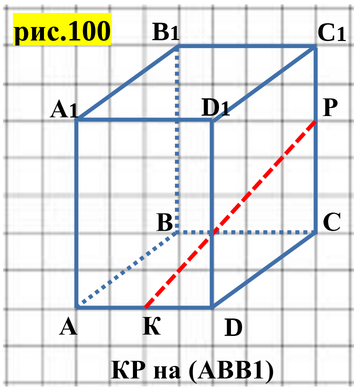


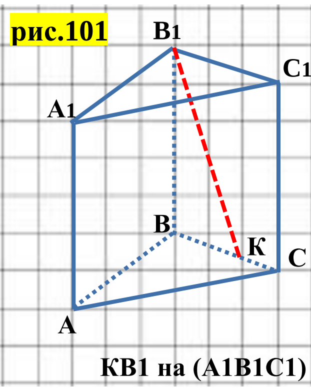
На практике же, мы знаем, что для построения какой-либо прямой достаточно двух точек. Поэтому при построении проекции мы будем следовать определенному алгоритму:
1) определить две точки, принадлежащие наклонной;
2) найти (возможно, с доказательством) проекции этих двух точек на плоскость;
3) провести прямую через пару спроецированных точек.
Заметим, если точка лежит на плоскости, то её проекция на плоскость – есть сама эта точка.

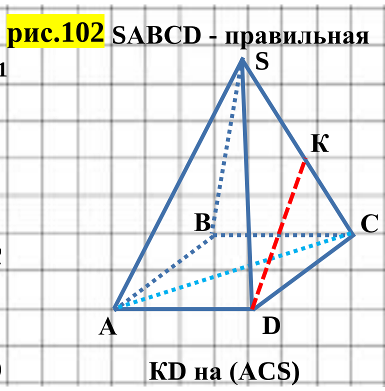


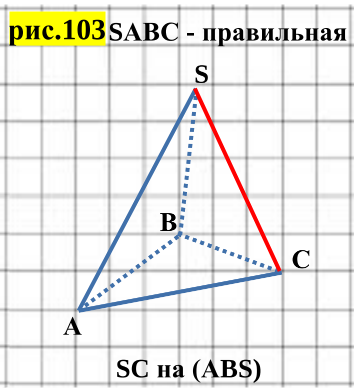
№1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка К – середина CC_1. Определите:
а) проекцию DB_1 на (ABB_1);
Приведём решение:
Точка B_1 уже лежит в плоскости ABB_1, следовательно, проецируется в саму себя. Точка D проецируется в точку A, т.к. DA перпендикулярно (ABB_1) по построению. Вывод: прямая AB_1 является проекцией прямой DB_1 на плоскость (ABB_1).
Определите проекцию прямой:
б) DB_1 на $(A_1B_1C_1)$;
г) DA_1 на плоскость (AB_1C_1);
в) AK на плоскость (ABC);
д) AK на плоскость (ADD_1).

№2. По готовому чертежу постройте проекцию данной прямой на данную плоскость. Дайте обоснование – почему указанная вами прямая действительно является проекцией.









Домашнее задание

1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ AB=6, BC=8, AC=10, AA_1=10. Обоснованно определите проекцию прямой:
а) CB_1 на плоскость (ABC);
б) AB_1 на плоскость (ACC_1);
в) CB_1 на плоскость (ABB_1).
г) Для каждой найденной проекции найдите длину её отрезка.

Тема 17.2 Проекция прямой на плоскость. Решение задач

№1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра AC=BC=5, AB=6, $AA_1=12$. Точка К – середина BC. Обоснованно определите проекцию прямой:
а) BC_1 на плоскость (ABC); б) AC_1 на плоскость (ABB_1); в) A_1K на плоскость $(A_1B_1C_1)$.

№2. В правильной треугольной пирамиде MABC рёбра основания равны $6\sqrt{3}$, боковые рёбра равны 12. Точки К и Р – середины рёбер BC и MC. Определите проекцию прямой:
а) AM на (ABC); б) KP на (ABC); в) AK на (ABM).

№3. В основании четырёхугольной пирамиды MABCD лежит ромб с диагоналями AC=30, DB=16, пересекающимися в точке О. Вершина пирамиды расположена точно над точкой О. Определите проекцию прямой:
а) AM на (ABC); б) AM на (BCM); в) MO на (BCM).

№4. В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF точка К – середина AS, точка О – центр основания. Рёбра основания равны 2, боковые рёбра 6. Определите проекцию прямой:
а) BS на (ABC); б) BS на (ACS); в) CK на (ABC).

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 3. Точка К лежит на ребре BB_1 так, что BK=1. Отрезок AK спроецировали на плоскость (BB_1D_1) и получили отрезок A_2K. Найдите длину данного отрезка.

2. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания 6 и боковым ребром $\sqrt{34}$. Высота пирамиды MO, точка К – середина ребра MC. Отрезок OK спроецировали на плоскость (MCD) в отрезок KH. Найдите длину данного отрезка.

Тема 18.1 Теорема о трёх перпендикулярах. Знакомство с теоремой

Для доказательства перпендикулярности скрещивающихся прямых применяют теорему о трёх перпендикулярах:

Наклонная перпендикулярна прямой, лежащей в плоскости, если её проекция на эту плоскость перпендикулярна данной прямой.

Стоит заметить, что плоскость, содержащая прямые a и a' тоже перпендикулярна прямой b, отсюда и название – теорема о трёх перпендикулярах (рис.104). Данная теорема является ключевой для доказательства перпендикулярности прямых в пространстве. Но не стоит забывать и о теореме обратной к теореме Пифагора.

рис.104

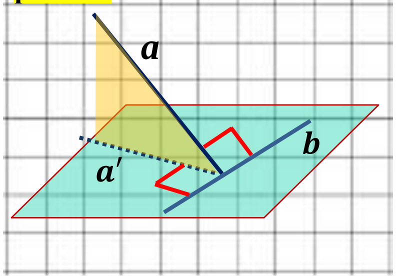
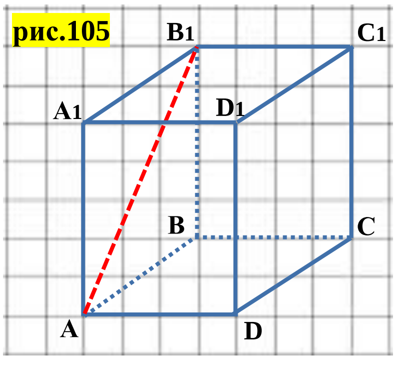


рис.105



№1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ докажите, что прямые AB_1 и A_1D_1 перпендикулярны.

Приведём доказательство:
Прямая AB является проекцией AB_1 на плоскость (ABC), вместе с тем, $AB \perp AD$ – как стороны прямоугольника. По теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp AD$. Прямые AD и A_1D_1 параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из параллельных прямых, то перпендикулярна и второй. Следовательно $AB_1 \perp A_1D_1$.

№2. Ребра основания правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 4, боковые рёбра 6. Точка К – середина CC_1.
а) докажите, что прямые KD и BC перпендикулярны;
б) найдите $\angle AKD$.

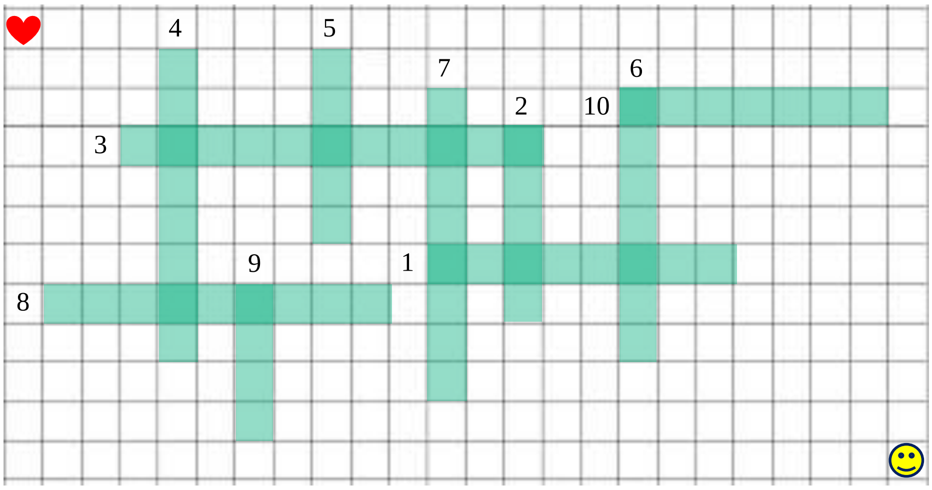
№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка О – центр грани ABCD.
а) докажите, что прямые OC_1 и B_1D_1 перпендикулярны;
б) найдите расстояние от точки C_1 до BD, если $AB=2\sqrt{3}$.

№4. В правильной треугольной пирамиде MABC все рёбра равны a, точка Р – середина MC.
а) докажите, что прямые AB и MC перпендикулярны;
б) найдите расстояние от Р до прямой AB.

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма, в треугольник основания ABC вписана окружность с центром О, которая касается стороны BC в точке К.
а) докажите, что прямые OK и C_1B перпендикулярны;
б) найдите $\angle KB_1B$, если радиус окружности равен 1, высота призмы равна $\sqrt{3}$ и $\angle ABC=60°$.

2. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь, вопросы переписывать не нужно.



1. Функция, выражающая угол, если известно отношение противолежащего катета и гипотенузы.
2. Геометрический объект нулевой мерности.
3. Отношение линейных размеров подобных фигур.
4. Основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.
5. Мера, которая у окружности радиуса r равна $2\pi r$.
6. Операция, при которой все точки отрезка перемещаются в одном направлении на одно расстояние, называется параллельный (…).
7. Многогранник с минимальным количеством граней.
8. Теорема, связывающая две стороны треугольника и угол между ними с третьей стороной.
9. Фигура, образованная парой лучей с общим началом.
10. Математик, чья теорема применима для доказательства перпендикулярности прямых.

Тема 18.2 Теорема о трёх перпендикулярах. Решение задач

№1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания равны 2, боковые рёбра 3. Точка К – середина АВ.
а) докажите, что прямые KC_1 и A_1B_1 перпендикулярны;
б) найдите расстояние от точки C_1 до прямой АВ.

№2. В треугольной пирамиде МАВС ребро МА=4 перпендикулярно плоскости основания, АВ=3, ВС=4, АС=5.
а) докажите, что прямые МВ и ВС перпендикулярны;
б) найдите расстояние от точки В до прямой МС.

№3. В основании пирамиды МАВСD лежит равнобедренная трапеция с основаниями ВС=4, АD=14 и боковой стороной АВ=13. Вершина пирамиды М проецируется в точку В. Точка К лежит на ребре АD так, что АК=5.
а) докажите, что прямые ВС и МК перпендикулярны;
б) найдите расстояние от точки В до прямой МК, если МВ=16.

№4. SABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания $2\sqrt{5}$ и высотой $\sqrt{11}$. Точка К делит апофему SH, проведенную к ребру CD, в соотношении 3:1, считая от вершины пирамиды. Точка О – центр основания. Найдите угол между ОК и ВС.

Домашнее задание

1. В основании пирамиды МАВСD лежит ромб с $\angle BCD=60°$, ребро МВ перпендикулярно плоскости основания. Точка Е – середина ребра МD.
а) докажите, что АМ=DМ;
б) докажите, что прямые АЕ и ВD перпендикулярны.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания равны 2, боковые рёбра 3. Точка К – середина АВ.
а) докажите, что прямые KC_1 и A_1B_1 перпендикулярны;
б) найдите расстояние от точки C_1 до прямой АВ.

Тема 18.3 Теорема о трёх перпендикулярах. Решение задач

№1. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, AB=6, AC=10. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, равноудалённой на расстояние 5 от вершин C и B_1.
а) докажите, что прямые B_1E и AB перпендикулярны;
б) найдите угол между прямыми AE и B_1E.

№2. MABC – треугольная пирамида с вершиной M, AB=17, BC=10, AC=21. Точка H лежит на AC так, что AH:HC=5:2. MH – высота пирамиды.
а) докажите, что прямые AC и MB перпендикулярны;
б) найдите площадь сечения MBH, если $MB=\sqrt{145}$.

№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $6\sqrt{2}$ точка K – середина DD_1, точка T – середина A_1D_1.
а) докажите, что прямые BT и B_1K перпендикулярны;
б) найдите угол между прямыми BT и AA_1.

№4. В призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является параллелограмм ABCD, AB=9, BC=15, площадь которого равна 90. Точка E лежит на стороне CD так, что BE=6.
а) докажите, что прямые AB и B_1E перпендикулярны;
б) найдите $\angle B_1EB$, если высота призмы $6\sqrt{3}$.

Домашнее задание

1. Основание пирамиды SABC – треугольник ABC с прямым углом C. Высота пирамиды SB. Точки M и K – середины рёбер AS и BC соответственно. Докажите, что MK является биссектрисой угла BMC.

2. В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD, ребро SB перпендикулярно плоскости основания.
а) докажите, что треугольники SAD и SCD – прямоугольные;
б) найдите их площади, если SB=12, AB=16, BC=9.

Тема 18.4 Теорема о трёх перпендикулярах. Закрепление материала

№1. В пирамиде MABC ребро MB перпендикулярно основанию, точка E – середина AC, BE=AE=CE.
а) докажите, что прямые AB и MC перпендикулярны;
б) найдите высоту пирамиды, если AC=5, $BC=\sqrt{21}$, $AM=4\sqrt{2}$.

№2. Около треугольника ABC описана окружность, причём AC – её диаметр. Точка M – середина ребра AB, SM – высота пирамиды SABC.
а) докажите, что треугольник SBC – прямоугольный;
б) найдите высоту пирамиды, если SA=2, $\angle ASB=120°$.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – призма, на ребре AC, как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону AB в точке P.
а) докажите, что треугольник PB_1C – прямоугольный;
б) найдите расстояние от точки P до прямой CB_1, если CP=12, $CB_1=20$.

№4. В основании пирамиды MABCD четырёхугольник с диагоналями AC=9, BD=8 и площадью 36, точка O – пересечение диагоналей. Высота пирамиды MO.
а) докажите что прямые MB и AC перпендикулярны;
б) найдите высоту пирамиды MABCD, если площадь треугольника AMC равна 27.

Домашнее задание

1. Окружность описана около квадрата. Над окружностью параллельно её плоскости летает утка. Охотник ходит по сторонам квадрата и стреляет в утку. Однако, попадёт он в неё только, если пуля будет лететь перпендикулярно стороне квадрата. Найдутся ли у охотника нужные точки для выстрела?

2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция ABCD с основаниями $BC=\sqrt{10}$, $AD=2\sqrt{10}$, и боковыми сторонами равными 5. Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

Тема 19.1 Расстояние между скрещивающимися прямыми. Определение расстояния

Для параллельных прямых есть бесконечно много общих равных перпендикуляров, каждый из которых – расстояние между ними.

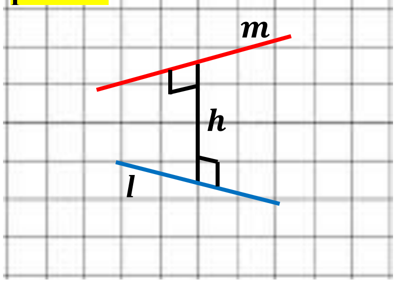
Для скрещивающихся прямых есть только один общий перпендикуляр, который и равен расстоянию между ними.

Основной алгоритм решения:

1) обоснованно найдите общий перпендикуляр к двум прямым;

2) вычислите длину этого перпендикуляра любым способом.

рис.106



№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $\sqrt{6}$ найдите расстояние между прямыми: а) AB_1 и BC; б) BD_1 и A_1C_1.

№2. Все рёбра правильной треугольной пирамиды MABC равны 12. Точка T – середина BC, точки K и P делят рёбра AB и AC в соотношении 2:1, считая от A.

а) докажите, что KP и MT перпендикулярны;

б) найдите расстояние между прямыми KP и MT.

№3. SABCDEF – правильная шестиугольная пирамида с ребром основания 3 и боковым ребром 5. Точки M, K, T – середины рёбер AS, DS, BC. Найдите расстояние между прямыми MK и ST.

№4. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC с прямым углом C, AC=4, BC=7. Грань ACC_1A_1 является квадратом.

а) докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны;

б) найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма с ребром основания 2 и высотой 3. Точка K – середина BB_1. Найдите расстояние между прямыми AK и B_1C_1.

2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма с ребром основания 4 и высотой 6. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и DF.

Тема 19.2 Расстояние между скрещивающимися прямыми. Более сложный случай

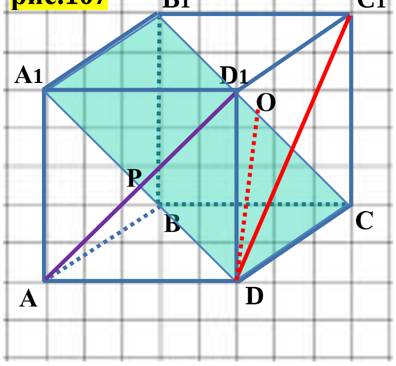
Альтернативный метод решения применяется, если прямые не перпендикулярны:

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между проекциями этих прямых на плоскость, перпендикулярную к одной из них.

№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $\sqrt{2}$ найти расстояние между прямыми AD_1 и DC_1.

Проведём плоскость (A_1B_1C) перпендикулярную к AD_1. Пусть O – центр грани BCC_1B_1, тогда DO – проекция прямой DC_1 на плоскость (A_1B_1C), точка P – проекция прямой AD_1 на эту же плоскость. Искомое расстояние – есть расстояние от точки P до прямой DO. Треугольник PDO – прямоугольный. Высота, опущенная на гипотенузу, может быть найдена, как произведение катетов, делённое на гипотенузу. $PO=\sqrt{2}$, PD=1, $DO=\sqrt{3}$. Тогда расстояние $\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

рис.107



№2. MABC – правильная треугольная пирамида с ребром основания 6 и высотой 12. Найдите расстояние между прямой, содержащей высоту пирамиды и медианой AK грани ABM.

№3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма с ребром основания 2 и высотой 3. Найдите расстояние между прямыми AC_1 и BE.

№4. Ребро MA=6 пирамиды MABC перпендикулярно основанию ABC, где AC=BC=5, AB=8. Точка K – середина ребра AB. Найдите расстояние между прямыми CK и MB.

Домашнее задание

1. MABCD – пирамида, в основании которой лежит ромб ABCD с углом ∠ABC=120°, все боковые рёбра пирамиды равны между собой. Точка S лежит на AM так, что MS:AS = 1:2.

а) докажите, что пирамида SABC – правильная;

б) найдите расстояние между высотой пирамиды SABC и прямой BD, если сторона AB равна $\sqrt{27}$.

2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 4 и боковым ребром $\sqrt{48}$. Точка E – середина AB. Найдите расстояние между прямыми A_1B и CE.

Тема 19.3 Расстояние между скрещивающимися прямыми. Закрепление материала

№1. SABC – треугольная пирамида, в основании которой правильный треугольник ABC с ребром 9, ребро SB=12 перпендикулярно основанию. Точка K – середина BC, точка P лежит на AC так, что AP=3. Точка T лежит на AS так, что AT=5.

а) докажите, что прямые AK и PT перпендикулярны;

б) найдите расстояние между прямыми AK и PT.

№2. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма. Точка E лежит на продолжении AA_1 так, что $AA_1=A_1E$, точка M лежит на продолжении B_1C_1 так, что $B_1C_1=C_1M$.

а) докажите, что прямые EM и A_1B_1 перпендикулярны;

б) найдите расстояние между AB и EM, если $AA_1=3$, AB=2.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, точка O – центр треугольника ABC. Угол между прямыми C_1O и BB_1 равен 45°, точка M – середина AB.

а) докажите, что $CM:BB_1 = 3:2$;

б) найдите расстояние между C_1O и A_1B_1, если $AA_1=12$.

Домашнее задание

1. Основанием треугольной пирамиды MABC является треугольник ABC с прямым углом B, AB=30, BC=40, точка K лежит на ребре AC так, что AK=18, точка M проецируется точно в точку K, $AM = \sqrt{373}$.

а) докажите, что прямые BM и AC перпендикулярны;

б) найдите расстояние между прямыми BM и AC.

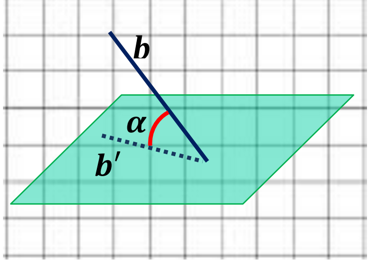
Тема 20.1 Угол между прямой и плоскостью. Определение угла

Сформулируем определение:

Угол между прямой и плоскостью – это угол между данной прямой и её проекцией на эту плоскость.

Таким образом, необходимо построить проекцию прямой на плоскость, а затем вычислить искомый угол между этой проекцией и самой прямой, используя уже известные нам способы.

рис.108



№1. В треугольнике ABC угол B – прямой, $AC=\sqrt{13}$, AB=1. Точка K является серединой BC. Отрезок MK=2 перпендикулярен плоскости (ABC). Найдите угол между прямой AM и плоскостью (ABC).

№2. В треугольнике ABC AB=BC=15, AC=18. Точка O – пересечение медиан BK и AM. Отрезок EB – перпендикуляр к плоскости (ABC), причём EO=16. Найдите угол между прямой EO и плоскостью (ABC).

№3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB=3, BC=5, $AA_1=\sqrt{2}$. Найдите угол между AC_1 и (ABB_1).

№4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB=2, $AA_1=\sqrt{20}$, K – середина AA_1. Угол между KC и (ABB_1) равен 45°. Найдите KC.

Домашнее задание

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью (ABC).

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью (ACC_1).

Тема 20.2 Угол между прямой и плоскостью. Решение задач

№1. SABCD – пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами AB=6, BC=8. Ребро BS=8 перпендикулярно основанию. Найдите угол между прямой SD и плоскостью (ABC).

№2. DABC – правильная треугольная пирамида, AB=6 и $AD=4\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой AD и плоскостью (ABC).

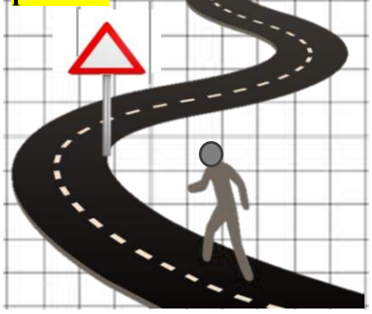
№3. DABC – правильная треугольная пирамида с ребром основания $4\sqrt{3}$, угол между ребром DB и (ABC) равен 60°. Найдите DB.

№4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма с ребром основания 4 и высотой 6. Найдите угол между сечением, проходящим через точки A, C, D_1 и прямой BD_1.

Домашнее задание

1. Дорожный знак в форме треугольника, высотой 68см. Из-за механического воздействия он наклонился точно в сторону наблюдателя, и для него видимая высота треугольника теперь стала составлять всего 34см. Найдите угол наклона знака к плоскости дороги, если он расположен точно на уровне глаз наблюдателя.

рис.109



2. Около треугольника ABC описана окружность, причём AB=4 – её диаметр, BC=$\sqrt{7}$. Призма $ABCA_1B_1C_1$ имеет высоту 3. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью (BCC_1).

Тема 20.3 Угол между прямой и плоскостью. Закрепление материала

№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите угол между плоскостью, проходящей через A, B, C_1, и прямой BD.

№2. В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны a. Найдите угол между её высотой и боковой гранью.

№3. Известно, что в основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD, AB = 4, BC = 3. Даны длины боковых рёбер SA=$\sqrt{11}$, SB=$3\sqrt{3}$, SD=$2\sqrt{5}$.

а) докажите, что SA – высота пирамиды;

б) найдите угол между прямой SC и плоскостью (ASB).

№4. Основание пирамиды MABCD – ромб ABCD, AB=8, $\angle BAD=60°$, MA = 15, MC=$\sqrt{33}$ и MB=MD.

а) докажите, что MC – высота пирамиды;

б) найдите угол между прямой MB и плоскостью (AMC).

Домашнее задание

1. SABCDEF – правильная шестиугольная пирамида с ребром основания 1 и боковым ребром 2. Найдите угол между прямой SC и плоскостью (ABC).

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки M и K – середины BC и CD. Через точки M, K и параллельно AA_1 проведена плоскость сечения β. Найдите угол между прямой A_1D и плоскостью β.

Тема 21.1 Угол между плоскостями. Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла

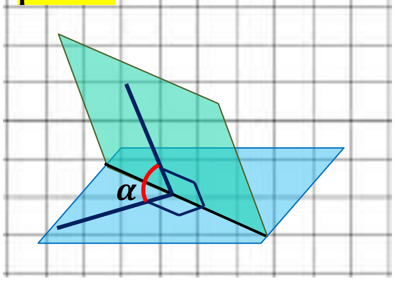
Познакомимся с новым понятием.

Двугранный угол – фигура, образованная парой пересекающихся плоскостей.

Линия их пересечения называется общим ребром. Двугранный угол называют четырьмя буквами. Две средние буквы – точки общего ребра, крайние буквы – по одной из каждой плоскости.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дадим название углу между гранями ABCD и BCC_1B_1. Общее ребро – BC. Точка, лежащая в первой грани – A, точка, лежащая во второй грани – C_1. Получаем угол $ABCC_1$.

рис.110



Линейный угол двугранного угла – угол между перпендикулярами к общему ребру двугранного угла.

Угол между двумя плоскостями будем считать равным величине острого линейного угла двугранного угла (рис.110).

№1. Дана правильная треугольная пирамида MABC, все рёбра которой равны 6.

а) постройте линейный угол двугранного угла ABCM;

б) найдите угол между плоскостями (ABC) и (BCM).

№2. Ребро AS пирамиды SABCDE перпендикулярно основанию пирамиды, которое является правильным пятиугольником.

а) постройте линейный угол двугранного угла BASE;

б) найдите угол между гранями BAS и EAS.

№3. Дана правильная четырёхугольная пирамида SABCD с боковым ребром 15 и ребром основания 18.

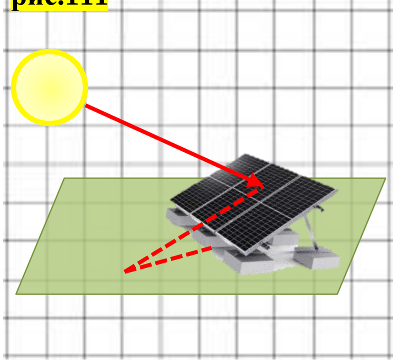
а) постройте линейный угол двугранного угла ACDS;

б) найдите угол между плоскостями (ABC) и (CDS).

Домашнее задание

1. Энергия, которую получает солнечная батарея, прямо пропорциональна синусу угла, под которым лучи падают на батарею. В некоторый день лучи солнца падают под углом 21° к поверхности земли. Солнечная батарея наклонена к поверхности земли под углом α, при котором она получает 50% возможной энергии. На сколько градусов надо изменить наклон батареи к плоскости земли, чтобы энергия была наибольшей?

рис.111



2. Ребро основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4, боковое ребро равно 6.

а) постройте линейный угол двугранного угла C_1BDC;

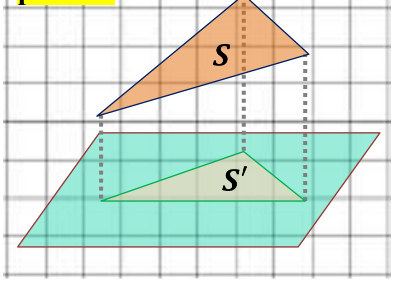
б) найдите угол между плоскостями (BDC_1) и (ABC).

Тема 21.2 Угол между плоскостями. Теорема о площади ортогональной проекции

На практике удобно пользоваться теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника:

Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади этого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции: $S' = S \cdot \cos(\alpha)$

рис.112



Следствие: угол между плоскостями можно вычислять, как арккосинус отношения площади многоугольника к площади его проекции. Таким образом: $\boldsymbol{\alpha = arccos\left(\frac{S'}{S}\right)}$. Эта формула особенно удобна, когда линейный угол двугранного угла сложно визуализировать.

№1. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, рёбра AB=BC=10, AC=12. Высота призмы равна $8\sqrt{3}$. Точки К, Р, Т – середины рёбер B_1A_1, C_1B_1, BB_1. Плоскость β проходит через точки К, Р, Т.

а) постройте проекцию сечения плоскостью β на (ABC);

б) найдите угол между плоскостями (ABC) и β.

№2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4 точки М и К – середины рёбер A_1B_1 и B_1C_1. Через точки А, М, К проходит плоскость β.

а) постройте проекцию сечения плоскостью β на (BCC_1);

б) найдите угол между плоскостями (BCC_1) и β.

№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 точка М – середина ребра C_1D_1. Через точки B_1, М, С проходит плоскость β.

а) постройте проекцию сечения плоскостью β на (ABB_1);

б) найдите угол между плоскостями (ABB_1) и β.

Домашнее задание

1. SABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания $\sqrt{12}$ и боковым ребром 3. Найдите угол между гранями:

а) ABCD и ABS; б) ABS и CDS;

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки М и К – середины АВ и ВС соответственно. Найдите угол между плоскостями (MKB_1) и (DCC_1).

Тема 21.3 Угол между плоскостями. Закрепление материала

№1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 8 точка М – середина ребра C_1D_1. Через точки B_1, М, С проходит плоскость β.

а) постройте проекцию сечения плоскостью β на (ABB_1);

б) найдите угол между плоскостями (ABB_1) и β.

№2. На ребре AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка Е так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка Т – середина B_1C_1, AB=9, AD=6, AA_1=14. Найдите угол между плоскостями (ETD_1) и (AA_1B_1).

№3. ABCD – параллелограмм, AB=$6\sqrt{3}$, BC=6, $\angle ABC = 150°$, треугольник CDM не лежит в плоскости (ABC), CM=DM=$\sqrt{31}$, BM=$\sqrt{7}$. Найдите угол между плоскостями (ABC) и (CDM).

№4. В основании пирамиды треугольник ABC, AB=BC=$2\sqrt{3}$, $\angle ABC = 120°$, ребро MC перпендикулярно основанию, угол между гранями ABM и ABC равен 30°. Найдите площадь ABM.

Домашнее задание

1. SABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания $2\sqrt{5}$ и боковым ребром 5. Тока E лежит на продолжении ребра AD за точку D так, что DE=AD.

а) докажите, что сечение пирамиды плоскостью (EBS) является равнобедренным треугольником;
б) найдите косинус угла между плоскостями (EBS) и (ABC).

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед с рёбрами AB=$\sqrt{2}$, $BC=AA_1=\sqrt{6}$. Найдите угол между плоскостями (ACB_1) и (BDA_1).

Тема 22.1 Перпендикулярность плоскостей. Признак перпендикулярности

Сформулируем определение:

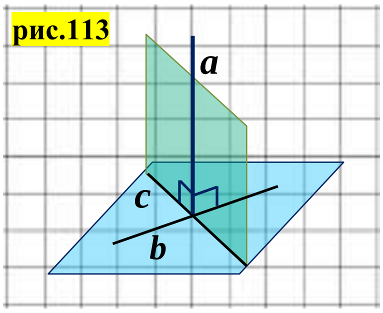
Плоскости называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Сформулируем признак:

Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости.

Необходимо будет доказывать перпендикулярность прямой и плоскости и принадлежность этой прямой к другой плоскости.

рис.113



№1. Дана плоскость α, в которой лежат отрезки AB=$\sqrt{3}$, AC=$\sqrt{8}$. Точка M не лежит в данной плоскости, причём AM=1, MB=2, MC=3. Докажите, что плоскость (AMC) перпендикулярна α.

№2. Треугольники ABC и AEC не лежат в одной плоскости. AB=BC=10, AC=16, AE=EC=17. Расстояние между вершинами B и E равно $\sqrt{261}$. Являются ли плоскости данных треугольников перпендикулярными?

№3. В пирамиде SABCD основанием является прямоугольник, AB=4, BC=8. Боковые рёбра AS=BS=4. Точки K и P – середины AB и CD, причём SK – высота пирамиды.

а) докажите, что (ABS) ⊥ (ABC);
б) найдите угол между плоскостями (ABS) и (CDS).

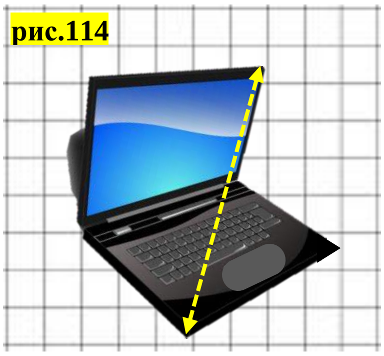
№4. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длины рёбер основания AB=7, BC=5, AC=$\sqrt{74}$, высота данной призмы равна 4.

а) докажите, что (ABB_1) ⊥ (BCC_1);
б) найдите угол между плоскостями (ABC_1) и (BCC_1).

Домашнее задание

1. Ноутбук в сложенном виде имеет длину и ширину 32см и 24см. Его открыли так, что две его части перпендикулярны. Найдите расстояние между двумя наиболее удаленными точками – левым нижним и правым верхним углами (рис.114).

рис.114



2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M – центр грани ABB_1A_1. Точка O – центр грани ABCD. Плоскость β проходит через точки O, M и параллельно прямой AB.

а) докажите, что плоскости β и (BCC_1) перпендикулярны;
б) найдите площадь сечения, если ребро куба 4.

Тема 22.2 Перпендикулярность плоскостей. Решение задач

№1. В треугольной пирамиде MABC AB=BC=10, AC=16. Точка K – середина ребра AC, ребро MB=10 – высота пирамиды.

а) докажите, что (ABC) ⊥ (BKM);
б) найдите угол между плоскостями (BKM) и (BCM).

№2. Ребро основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равно 1, боковое ребро равно 2.

а) докажите, что (ACC_1) ⊥ (BEE_1);
б) найдите угол между плоскостями (ACC_1) и (ACB_1).

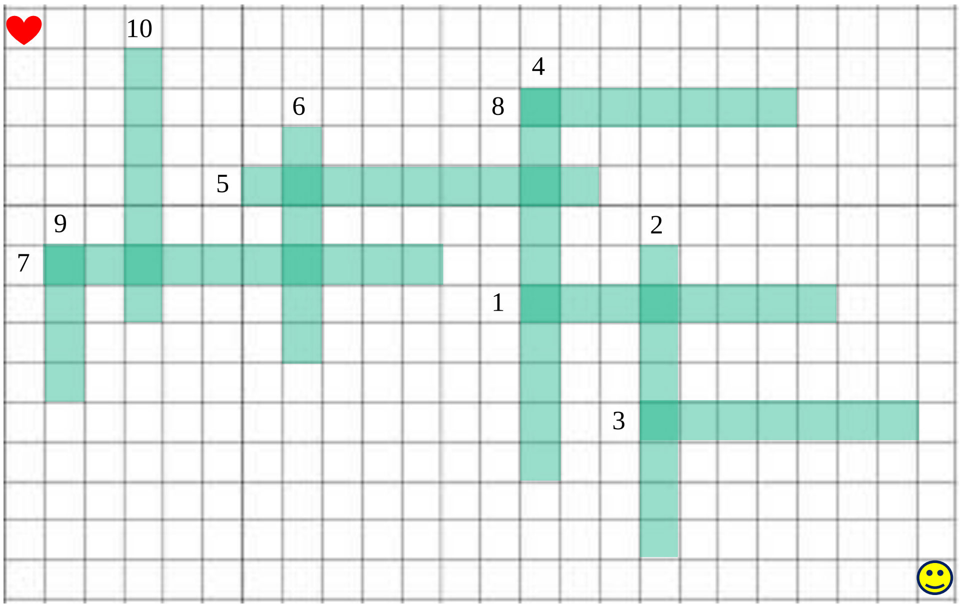
№3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB=4$, $BC=3$, $AA_1=3$. Точка E лежит на отрезке AC так, что $CE=1{,}8$.

а) докажите, что $(ACC_1) \perp (EBB_1)$;

б) найдите угол между плоскостями (ACC_1) и (ACB_1).

Домашнее задание

1. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь. Вопросы переписывать не нужно.



1. Угол между перпендикулярами к общему ребру граней.
2. Второе название куба.
3. Высота боковой грани пирамиды.
4. Призма с равносторонним многоугольником в основании.
5. Прямая из теоремы о трёх перпендикулярах.
6. Фигуры, поэлементно совпадающие при наложении.
7. Угол, образованный двумя плоскостями с общим ребром.
8. Преобразование, при котором каждая точка фигуры переносится на один угол, относительно фиксированной точки.
9. Часть окружности, заключённая между двумя её точками.
10. Отношение площади проекции многоугольника к его площади.

2. $ABCA_1B_1C_1$ – прямая треугольная призма с рёбрами $AB=2$, $BC=4\sqrt{2}$, $AC=6$, $AA_1=1$. Точка M – середина A_1B_1. Проведена плоскость сечения призмы через точки M, B, C.

а) докажите, что плоскости (MBC) и (ABB_1) перпендикулярны;

б) найдите площадь сечения.

Тема 22.3 Перпендикулярность плоскостей. Закрепление материала

№1. В правильной пирамиде SABCD все рёбра равны. Точка M – середина AS. Точка P – середина высоты пирамиды.

а) докажите, что $(BDS) \perp (BMP)$;

б) найдите угол между плоскостями соседних боковых граней.

№2. В треугольной пирамиде MABC $AC=BC=8\sqrt{29}$, $AB=32$. Вершина M пирамиды проецируется на медиану треугольника CE. Точка K лежит на ребре MC, точка P лежит на ребре AC, точка T лежит на ребре BC так, что $CK=17$, $PK=TK=10$, $PC=TC=3\sqrt{29}$.

а) докажите, что $(PKT) \perp (ABC)$;

б) найдите расстояние между прямыми KT и CE.

№3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре BC выбрана точка E так, что $\angle BAE=25°$, $\angle CDE=65°$. Проведены два сечения: через точки A, E, A_1 и через точки D, E, D_1.

а) докажите, что плоскости этих сечений перпендикулярны;

б) найдите площадь треугольника A_1ED_1, если угол между ним и плоскостью основания равен 60°.

Домашнее задание

1. SABC – треугольная пирамида, ребро SA перпендикулярно плоскости основания, AC=CB, AS=AB, $\angle ACB=120°$. Точка P лежит на ребре SC так, что CP=AC, точка T – середина AC. Докажите, что плоскость BPT перпендикулярна плоскости ABC.

2. SABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания 4 и боковым ребром 6. Точка M лежит на ребре AS так, что AM=1,5. Сечение проходит через точки D, C, M.
а) докажите, что плоскости (DCM) и (ABS) перпендикулярны;
б) найдите площадь сечения призмы.

Тема 23.1 Подведение итогов главы. Решение задач

№1. Все ребра правильной пирамиды SABCD равны 4. Точка H – середина ребра SC, отрезок SO – высота пирамиды.
а) докажите, что $AS \perp SC$;
б) найдите угол между прямыми SO и HD.

№2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма с ребром основания 6 и высотой 13. Точка K лежит на ребре CC_1 так, что CK=4.
а) докажите, что $(ADK) \perp (A_1D_1K)$;
б) найдите угол между плоскостью (ADK) и прямой KA_1.

№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 точка M лежит на ребре CC_1 так, что CM=3. Плоскость β проходит через точки B_1, M и параллельно прямой DC_1 и пересекает ребро CD в точке T. Точка O – центр квадрата ABB_1A_1.
а) докажите, что $OD_1 \perp MT$;
б) найдите угол между плоскостями (AB_1D_1) и β.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед с рёбрами AB=6, BC=5, $AA_1=2$. Точка M лежит на ребре A_1B_1 так, что $A_1M=1$. Точка K лежит на ребре AD так, что AK=2. Докажите, что прямые MK и CK перпендикулярны.

2. В треугольной пирамиде MABC ребра $AB=\sqrt{7}$, BC=AM=4, BM=3, MC=5, $\angle ABC = 30°$.
а) докажите, что $(ABC) \perp (MBC)$;
б) найдите расстояние от точки A до прямой BC.

Тема 23.2 Подведение итогов главы. Решение задач

№1. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, в основании которой прямоугольный треугольник с катетами AB=15, BC=20. Точка P лежит на ребре AC так, что AP=9. Высота призмы 11.
а) докажите, что $PB_1 \perp AC$;
б) найдите угол между плоскостью (ABB_1) и прямой PB_1.

№2. SABCDEF – правильная пирамида, в которой угол между прямыми BS и ES равен 60°. Точка K – середина ребра SE.
а) докажите, что $BK \perp SE$;
б) найдите расстояние между прямыми BK и FD, если AB=2.

№3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на отрезке A_1C_1 лежит точка M, $A_1M = a$, точка K лежит на AA_1, $AK = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
а) докажите, что $AM \perp (BDK)$;
б) найдите угол между плоскостями (BDK) и (ABC).

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 2, и диагональю боковой грани $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостями (ABC) и (BCA_1).

2. В основании треугольной пирамиды SABC треугольник ABC с прямым углом C, $\angle ABC = \angle ABS = 45°$, ребро SA перпендикулярно плоскости основания.
а) докажите, что $SC \perp BC$;
б) найдите $\angle SBC$;

Тема 23.3 Подведение итогов главы. Решение задач

№1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания 6, высота 3. Точка М – середина A_1C_1, точка К – середина АВ, точка Р лежит на ребре A_1B_1 так, что $B_1P=1$, плоскость β параллельна АС и содержит точки К и Р.

а) докажите, что $BM \perp \beta$;

б) найдите угол между прямой MB и плоскостью (ABC).

№2. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах A_1B_1 и АС лежат точки Р и М так, что $B_1P:PA_1 = CM:MA = 1:2$.

а) докажите, что $MA_1=MP$;

б) найдите угол между плоскостями (A_1MP) и (ABB_1).

№3. В правильной шестиугольной пирамиде угол между боковой гранью и основанием 60°.

а) докажите, что отношение апофемы и ребра основания равно $\sqrt{3}$;

б) найдите косинус угла между смежными боковыми гранями.

Домашнее задание

1. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью (ADE_1).

2. В правильной треугольной пирамиде рёбра основания равны 6, боковые рёбра равны $\sqrt{15}$.

а) докажите, что угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 45°;

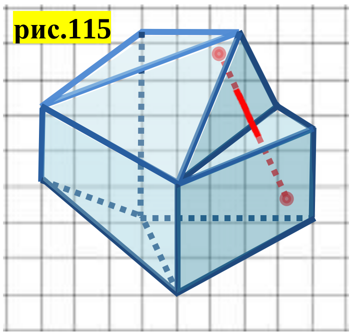
б) найдите косинус угла между апофемами пирамиды.

Тема 24.1 Правильные многогранники. Основные определения

Существует понятие выпуклого многогранника. Это такой многогранник, который вместе с любой парой внутренних точек содержит целиком отрезок, соединяющий их. Таковыми, например, являются известные нам пирамида или призма.

В противоположность им, существуют невыпуклые многогранники. Визуально мы видим, как часть их граней обращена внутрь самого многогранника, образуя вогнутую поверхность. Примером такого многогранника может служить необычная фигура на рисунке 115.

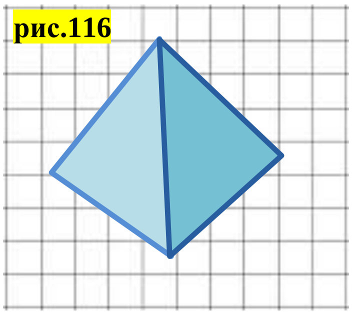
рис.115



Правильным называют выпуклый многогранник, все грани которого равные правильные многоугольники, в каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер.

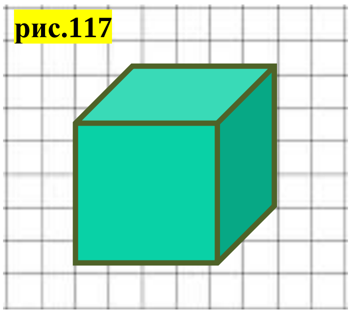
Есть пять фигур, удовлетворяющих этим условиям. Доказательство этого факта и того, что других правильных многогранников нет, принадлежит древнегреческому математику Теэтету Афинскому. Рассмотрим эти фигуры.

рис.116



Тетраэдр – многогранник с 4 гранями, каждая из которых – правильный треугольник, в каждой вершине сходятся 3 ребра. Иногда тетраэдром называют и любую другую треугольную пирамиду, поэтому употребляется дополнение «правильный» тетраэдр. Используют в каркасном строительстве, как устойчивую фигуру (рис.116).

рис.117

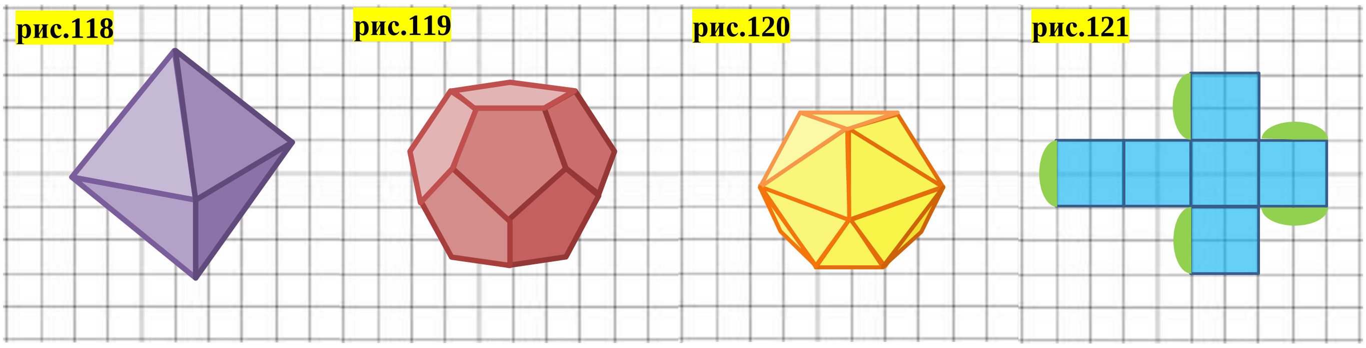


Гексаэдр – многогранник с 6 гранями, каждая из которых – квадрат, в каждой вершине сходятся 3 ребра. Так же всем известен, как «куб», со свойствами которого мы уже достаточно хорошо знакомы. Куб уникален ещё и тем, что все его соседние рёбра и грани перпендикулярны (рис.117).

Октаэдр – многогранник с 8 гранями, каждая из которых – правильный треугольник, в каждой вершине сходятся 4 ребра. Октаэдр является формой кристаллов некоторых химических веществ, таких как калиевые кварциты, алмазы, куприты (рис.118).

Додекаэдр – многогранник с 12 гранями, каждая из которых – правильный пятиугольник, в каждой вершине сходятся 3 ребра.

Многогранник, который стал прототипом раскраски всем известного футбольного мяча. Это один из интересных многогранников в декоративно-прикладном искусстве (рис.119).



Икосаэдр – многогранник с 20 гранями, каждая из которых – правильный пятиугольник, в каждой вершине сходятся 5 рёбер. Он идеален, как форма огранки алмазов, известен, как природная форма некоторых видов вирусов – фагоцитов, а также как один из видов древней игральной кости (рис.120).

Для всех выпуклых многогранников число их вершин, рёбер и граней связано определенным соотношением. Это комбинаторное свойство многогранников изучил и вывел Леонард Эйлер в XVIII веке.

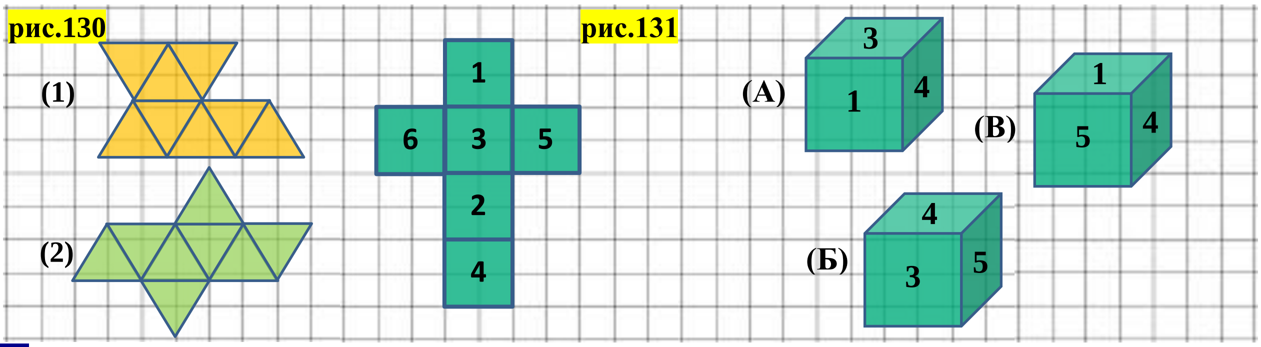
Теорема Эйлера: **В – Р + Г = 2**, где В – число вершин, Г – число граней, Р – число рёбер. Для невыпуклых многогранников эта теорема не выполняется.

Развёртка многогранника – непрерывная плоская фигура, составленная из многоугольников, равных граням этого многогранника, с указанием способа его сборки.

Если развёртку вырезать из бумаги, то можно склеить многогранник. На рисунке 121 развёртка куба, дополненная выносками для склеивания.

№1. По элементу правильного многогранника установите его название. Всегда ли это можно сделать однозначно?

а) имеет 12 граней;
б) имеет 6 вершин;
в) имеет 12 рёбер;
в) имеет 6 рёбер;
г) во всех вершинах сходятся 5 рёбер.



№2. Нарисуйте две различные развёртки, из которых можно собрать гексаэдр. Вычислите периметр каждой из них, полагая, что ребро куба равно 1. Что вы замечаете?

№3. Нарисуйте две различные развёртки правильного тетраэдра. Вычислите периметр каждой из них, полагая, что ребро тетраэдра равно 1. Что интересного вы замечаете?

№4. На рисунке 130 две развёртки октаэдра, одна из которых неправильная. Назовите признак, по которому можно её определить?

№5. Все грани развёртки гексаэдра на рисунке 131 пронумерованы. Из развёртки собрали многогранник. В каком варианте этот куб изображён верно?

Домашнее задание

1. Изготовьте модель октаэдра из бумаги. Найдите суммарную площадь всех его граней.

2. Нарисуйте пятиугольную призму и пирамиду. Проверьте на них теорему Эйлера.

3. Найдите информацию о том, что такое полуправильный многогранник. Приведите примеры.

4. Сколько диагоналей додекаэдра можно провести из одной его вершины? Ответ обоснуйте кратким рассуждением.

Тема 24.2 Правильные многогранники. Решение задач

№1. Докажите, что диагонали d октаэдра с ребром a вычисляются по формуле $d = a \cdot \sqrt{2}$

№2. Докажите, что высота H правильного тетраэдра с ребром a имеет формулу $H = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

№3. Строительный каркас из металла для укрепления стены представлен в виде повторяющихся конструкций похожих на рёбра куба вместе со всеми его диагоналями. Какое наименьшее целое число метров металлического прута потребуется для изготовления одной конструкции с ребром 50см?

№4. Дан правильный октаэдр с ребром $\sqrt{24}$.

а) докажите, что его противоположные грани параллельны;

б) найдите расстояние между этими гранями.

№5. В центрах всех граней куба поставили точки.

а) докажите, что полученные точки являются вершинами некоторого правильного многогранника;

б) вычислите сумму длин всех его рёбер, если длину ребра куба полагать равным 2.

Домашнее задание

1. Найдите расстояние между центрами граней правильного тетраэдра с ребром a.

2. Все рёбра правильного икосаэдра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по его поверхности из некоторой вершины в противоположную ей вершину.

Тема 25.1 Площадь поверхности многогранников. Теория и практика

Одна из ключевых характеристик многогранников – площадь их поверхности. Обратите внимание, что под поверхностью понимается, не одна грань, а их совокупность!

Площадь полной поверхности многогранника – это сумма площадей всех его граней.

Для призм и пирамид отдельно рассмотрим так же понятие площади боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности призмы или пирамиды – это сумма площадей всех боковых граней.

№1. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра AB=BC=25, AC=14, AA_1=10. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности.

Приведём решение:

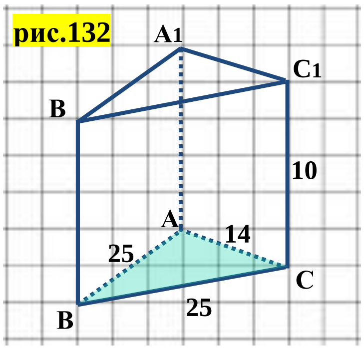
Найдём площадь боковой поверхности. Она складывается из площадей трёх боковых прямоугольных граней.

$\boldsymbol{S}_{\text{бок}} = 14 \cdot 10 + 25 \cdot 10 + 25 \cdot 10 = 640.$

Основания призмы – равные треугольники с известными сторонами. Площадь ABC найдём по формуле Герона.

$\boldsymbol{S}_{\text{осн}} = \sqrt{32 \cdot (32 - 25)(32 - 25)(32 - 14)} = 168.$ Тогда площадь полной поверхности: $\boldsymbol{S}_{\text{пол}} = 2 \cdot 168 + 640 = 976.$

рис.132



№2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) найдите площадь его поверхности, если ребро равно 5;

б) найдите ребро куба, если площадь его поверхности 96;

в) если ребро куба увеличить на 3, то площадь его поверхности увеличится на 126, найдите длину его ребра.

№3. Дан правильный икосаэдр с ребром a.

а) докажите, что площадь его полной поверхности $5a^2\sqrt{3}$;

б) во сколько раз увеличится площадь его полной поверхности, если все рёбра увеличатся на 50%?

№4. Дана прямоугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) найдите площадь поверхности, если AB=2, BC=3, AA_1=7;

б) найдите AA_1, если AB=3, BC=10, $\boldsymbol{S}_{\text{пол}}$ =164;

в) пусть призма правильная и боковое ребро на 5 больше, чем ребро основания, а $\boldsymbol{S}_{\text{пол}}$ =114. Найдите высоту призмы.

Домашнее задание

1. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями 42 и 40. Высота призмы равна 5. Найдите площадь боковой поверхности призмы, найдите площадь полной поверхности.

2. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 4, 13, 15. Высота призмы 10. Найдите площадь боковой поверхности призмы, найдите площадь полной поверхности.

Тема 25.2 Площадь поверхности многогранников. Решение задач

№1. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды с ребром основания 8 и боковым ребром 5.

№2. Найдите площадь боковой поверхности правильной пятиугольной пирамиды с ребром основания 10 и боковым ребром 13.

№3. В основании призмы лежит ромб с диагоналями 8 и 6, а её высота равна 10. Найдите площадь поверхности призмы.

№4. В основании призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 10, и с боковой стороной 5. Высота призмы равна 2,5. Найдите площадь поверхности призмы.

№5. В основании призмы лежит треугольник с катетами 9 и 40. Площадь полной поверхности равна 630. Найдите высоту призмы.

№6. Ребро основания правильной треугольной призмы равно $2\sqrt{3}$, а боковое ребро 2. Найдите площадь её полной поверхности.

Домашнее задание

1. В основании прямой призмы лежит параллелограмм со сторонами 4 и 5 и углом 30°. Высота призмы равна 6. Найдите площадь боковой поверхности, найдите площадь полной поверхности.

2. В основании прямой призмы лежит треугольник со сторонами 12, 14, 16. Площадь её боковой поверхности равна 210. Найдите высоту призмы.

Тема 25.3 Площадь поверхности многогранников. Решение задач

№1. В правильной четырёхугольной пирамиде ребро основания равно 6, а высота $\sqrt{7}$. Найдите площадь её боковой поверхности.

№2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 10 провели сечение через точки A, C, B_1, которое разделило его на два многогранника. На сколько площадь поверхности большего из них больше, чем площадь поверхности меньшего?

№3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра основания AB=AC=4, BC=6, боковые рёбра равны 6. Точки M и K – середины рёбер BB_1 и CC_1. Через точки A_1, M, K проведено сечение, которое разделило призму на две части. Найдите площадь поверхности того многогранника, у которого количество вершин меньше.

№4. В основании пирамиды лежит прямоугольник ABCD, AB=3, BC=6. Точка H – середина BC, SH=4 – высота пирамиды. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

№5. Площадь полной поверхности правильной четырёхугольной призмы на 32 больше площади её боковой поверхности. Найдите ребро основания призмы.

№6. В правильной треугольной призме боковое ребро в $\sqrt{3}$ раз больше, чем ребро основания. Во сколько раз площадь полной поверхности у такой призмы больше, чем площадь её основания?

Домашнее задание

1. В основании правильной пирамиды лежит треугольник со стороной 10. Боковые рёбра пирамиды равны 13. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. В основании прямой призмы квадрат, около которого описана окружность радиуса $\sqrt{32}$. Высота призмы равна 7. Найдите площадь полной поверхности призмы.

Тема 25.4 Площадь поверхности многогранников. Решение практических задач

№1. На крыше торгового центра решили построить стеклянный купол в форме правильной шестиугольной пирамиды с ребром основания 4м и высотой 3м. Сколько квадратных метров стекла понадобится для реализации строительства? Ответ округлить до целых.

№2. Коробку в форме куба с ребром 20см надо обклеить подарочной бумагой с внешней стороны. Сколько бумаги для этого потребуется, если на стыковку уходит до 5% от общей площади?

№3. Сколько стекла потребуется, чтобы изготовить аквариум в форме параллелепипеда без крышки, если дно имеет длину и ширину 60см и 30см, высота 40см? Ответ дать в $м^2$.

№4. Комната имеет длину и ширину 6,5м и 3,5м, и высоту потолка 3м. Рулон обоев имеет ширину 1 м. Сколько рулонов надо купить для ремонта комнаты, если (учитывается, что 1м – пустота в дверном проёме) длина одного рулона 10м?

№5. Шестигранная стальная труба имеет поверхность соответствующую боковой поверхности правильной шестиугольной призмы без оснований. Такие трубя используют в атомной промышленности. Длина трубы 6 метров. Ширина грани 10см. Трубу требуется покрасить. На покраску 1 кв.м. уходит 110г краски. Сколько краски потребуется для того, чтобы покрасить снаружи эту трубу?

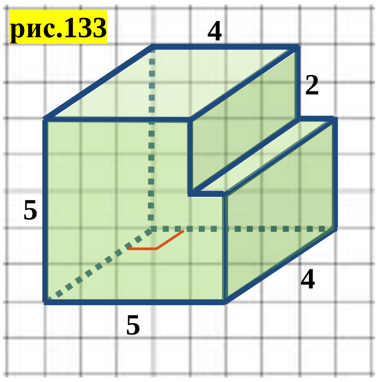
Домашнее задание

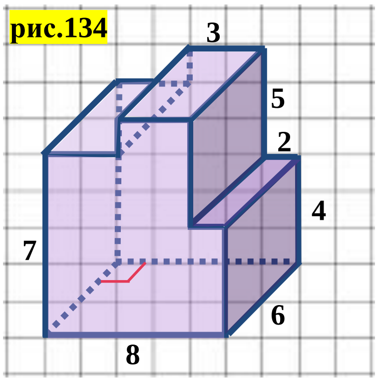
1. У куба с ребром 4 от каждой вершины на каждом ребре отмеряют единичный отрезок. Через полученные точки у куба спиливают все углы. Найдите $S_{пол}$ полученной фигуры.

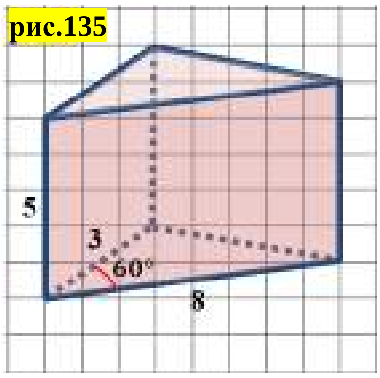
2. Имеется прямоугольный лист поликарбоната 1×2 м – пластика, используемого для бытовых и промышленных нужд. Его можно разрезать на 6 частей, чтобы собрать коробку в форме параллелепипеда. Покажите, как это сделать, чтобы никаких остатков материала не было.

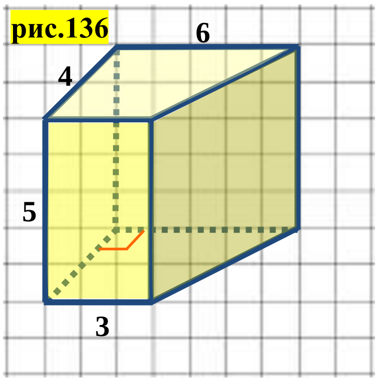
Тема 25.5 Площадь поверхности многогранников. Закрепление материала

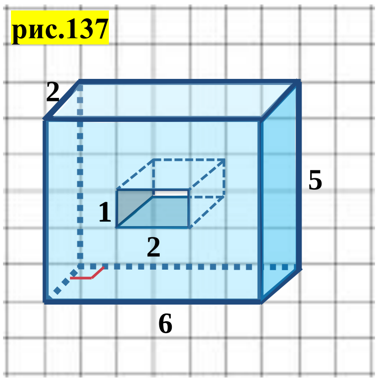
№1. По готовым чертежам определить площадь поверхности многогранников.

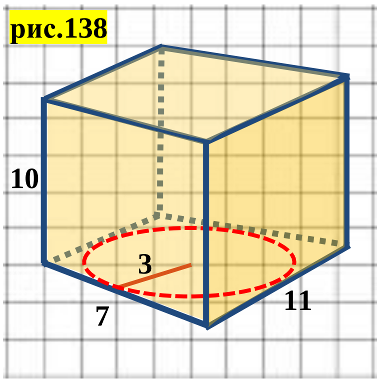












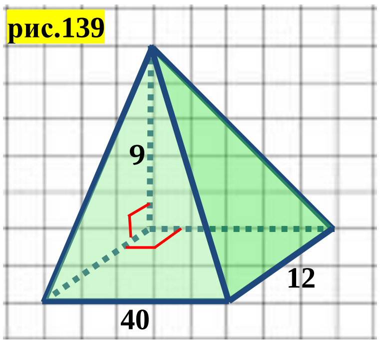
№2. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 2, площадь её боковой поверхности равна 40. Найдите площадь её полной поверхности.

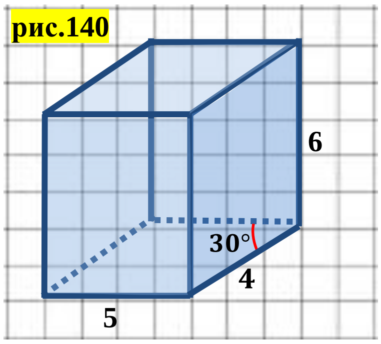
№3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если её высота $4\sqrt{3}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°.

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма с рёбрами $AC=BC=4$, $CC_1=5$, $\cos\angle ACB = \frac{7}{8}$. Найдите площадь её боковой поверхности.

2. По готовым чертежам определить площадь поверхности многогранников.





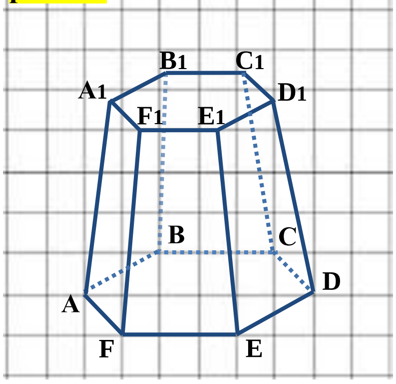
Тема 26.1 Усечённая пирамида

В данной главе рассмотрим специальные виды многогранников, полученные из уже известных нам пирамид.

Усечённая пирамида – многогранник, полученный отсечением от пирамиды части плоскостью, параллельной её основанию.

Боковые грани усеченной пирамиды являются трапециями, а её основания являются подобными многоугольниками (рис.141).

рис.141



№1. Дана правильная четырёхугольная пирамида SABCD с ребром основания 18 и высотой 12. Точки A_1, B_1, C_1 делят рёбра SA, SB, SC в соотношении 1:2, считая от вершины пирамиды. Через точки A_1, B_1, C_1 проведено сечение, которое делит пирамиду на две части. Найдите площадь поверхности того многогранника, у которого количество рёбер больше.

№2. Дана усечённая треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$, большим основанием которой служит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=BC=8\sqrt{3}$. Ребро $BB_1=4$ перпендикулярно основаниям пирамиды. Ребро AA_1 образует с плоскостью (ABC) угол 30°. Найдите площадь боковой поверхности многогранника.

№3. В правильной усеченной шестиугольной пирамиде ребро большего основания равно 42, ребро меньшего основания равно 2, боковое ребро равно 29. Найдите площадь её боковой поверхности.

№4. Кухонная вытяжка имеет форму правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, ребро нижнего основания 60см, ребро верхнего основания 20см, боковые рёбра равны 52см. Высота кухонной плиты 90см. Эта вытяжка прикреплена прямо к потолку. По новым техническим рекомендациям вытяжка должна располагаться на расстоянии в диапазоне 110-120см от поверхности плиты. Соблюдены ли рекомендации, если высота потолка на кухне равна 260см (рис.142)?

рис.142

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – усечённая пирамида, в основании которой лежит треугольник ABC с прямым углом B, и ребро BB_1 перпендикулярно плоскостям оснований. Рёбра $AB=4\sqrt{6}$, $BC=2$, $A_1C_1=5$, $BB_1=\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью (ABC).

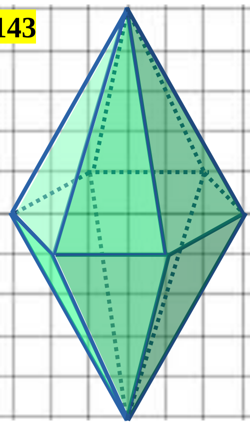
2. Площадь поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 384. Правильная четырёхугольная пирамида имеет основание ABCD и высоту 10. Пересечение двух этих тел – усечённая пирамида. Найдите площадь её меньшего основания.

Тема 26.2 Бипирамида

Бипирамида – многогранник, образованный парой пирамид с общим основанием.

Бипирамиды могут быть как правильными, в которых две части являются зеркальным отражением друг друга, так и состоять из двух разных пирамид (рис.143).

рис.143



Можно совместить усечённые пирамиды, тогда получится усечённая бипирамида.

№1. Бипирамида образована двумя правильными тетраэдрами с общим основанием ABC и вершинами M и K.

а) постройте развёртку данной бипирамиды;

б) докажите, что BC ⊥ (MAK);

в) найдите угол между гранями ABK и ABM.

№2. Бипирамида образована двумя правильными пятиугольными пирамидами с ребром основания 14 и боковым ребром 25. Найдите площадь поверхности такой бипирамиды.

№3. Бипирамида образована двумя правильными семиугольными пирамидами с боковыми рёбрами, равными 10, и углом между этими рёбрами 30°. Найти площадь её поверхности.

№4. Бипирамида образована правильной четырёхугольной пирамидой MABCD с одной стороны и усеченной четырёхугольной пирамидой с другой стороны с меньшим основанием $A_1B_1C_1D_1$, рёбра которого в 2 раза меньше, чем рёбра основания ABCD. Найдите расстояние от точки M до плоскости $A_1B_1C_1D_1$, если AB=AM=2.

Домашнее задание

1. Бипирамида получена путём соединения двух правильных шестиугольных пирамид с ребром основания 2. Боковое ребро одной пирамиды равно $\sqrt{20}$, боковое ребро второй равно $\sqrt{13}$. Найдите расстояние между вершинами бипирамиды.

2. Бипирамида получена путём соединения двух правильных четырёхугольных пирамид с ребром основания 20 и боковым ребром 26. Найдите площадь её поверхности.

Тема 26.3 Усечённая пирамида и бипирамида. Закрепление материала

№1. Усечённая пирамида имеет основания ABC и $A_1B_1C_1$ – прямоугольные треугольники с катетами AB=9, BC=12, A_1B_1=3, B_1C_1=4. Ребро BB_1=7,2 перпендикулярно основаниям. Точка H – основание перпендикуляра, проведённого из B на AC.

а) найдите угол между прямой B_1H и плоскостью (ABC);

б) найдите угол между прямой B_1H и плоскостью (BB_1C);

№2. Бипирамида получена соединением двух правильных треугольных пирамид с ребром основания 12. У одной из них боковое ребро равно 7, а у второй $\sqrt{52}$. Найдите рассояние между двумя вершинами пирамиды.

№3. В правильной треугольной пирамиде все рёбра равны 12. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Эта плоскость отделяет усечённую пирамиду. Найдите площадь полной поверхности этой усечённой пирамиды.

№4. Бипирамида получена соединением двух правильных пятиугольных пирамид с ребром основания 24. Боковые рёбра одной из них равны 15, а у другой 37. Найдите площадь полной поверхности бипирамиды.

Домашнее задание

1. Бипирамида получена соединением двух правильных четырёхугольных пирамид с ребром основания 8. У одной из них боковое ребро равно 6, а у второй 9. Найдите расстояние между двумя вершинами пирамиды.

2. Определить истинность утверждений:

а) в усеченной пятиугольной пирамиде 7 граней;

б) в усеченной треугольной пирамиде 12 рёбер;

в) число рёбер всех бипирамид кратно трём;

г) у всех бипирамид есть параллельные грани.

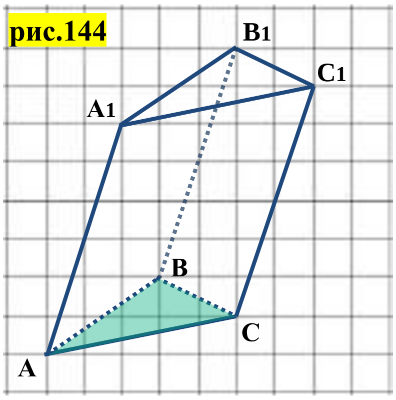
Тема 27.1 Наклонная призма. Основные понятия

До сих пор мы рассматривали прямые призмы, их боковые рёбра перпендикулярны основанию.

Наклонной называют призму, боковые рёбра которой не перпендикулярны основанию.

Наклонная призма (рис.144), как и прямая, имеет два параллельных равных основания. Боковые грани – параллелограммы. Если наклон призмы осуществляется в направлении, перпендикулярном ребру основания, то данная грань будет прямоугольником. Высота наклонной призмы не равна боковому ребру. Наклон призмы определяется углом между боковым ребром и плоскостью основания призмы.

рис.144



№1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, в основании прямоугольник ABCD, AB=3, BC=6. Точка B_1 проецируется в точку C. Высота призмы равна 6. Найдите площадь полной поверхности призмы.

№2. В призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является правильный треугольник со стороной 15, боковые рёбра равны 10. Вершина A_1 проецируется точно в ортоцентр треугольника ABC.

а) найдите угол между боковым ребром и плоскостью (ABC);

б) найдите высоту призмы.

№3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ основанием является прямоугольный треугольник с катетами $AB=4$, $BC=\sqrt{50}$. Вершина A_1 проецируется точно в середину ребра AB. Боковые рёбра наклонены к основанию под углом 45°.
а) найдите высоту призмы;
б) найдите площадь грани BCC_1B_1.

Домашнее задание

1. В четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является ромб с диагоналями $AC=2\sqrt{3}$, $BD=2$. Вершина B_1 проецируется в середину ребра AD. Высота призмы равна 1.
а) найдите угол между боковым ребром и плоскостью (ABC);
б) найдите длину бокового ребра призмы.

2. Определить истинность утверждений, докажите свой ответ:
а) если высота призмы равна половине бокового ребра, то угол её наклона равен 30°;
б) если высота призмы равна боковому ребру, то угол её наклона равен 45°.

Тема 27.2 Наклонная призма. Решение задач

№1. В четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основанием является квадрат со стороной $\sqrt{8}$. Точка O лежит на продолжении AC за вершину A так, что $AO=2$. Вершина A_1 проецируется в точку O. Угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 30°.
а) найдите угол высоту призмы;
б) найдите площадь сечения, проходящего через точки O, A_1, C_1.

№2. В треугольной призме все рёбра основания равны 3. Только одна из боковых граней перпендикулярна к плоскости основания и является ромбом с меньшей диагональю, равной 2.
а) найдите высоту призмы;
б) найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

№3. В призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ основанием является правильный шестиугольник со стороной 3, высота призмы равна $3\sqrt{3}$, точка A_1 проецируется точно в центр основания призмы.
а) докажите, что прямые EF_1 и BC перпендикулярны;
б) найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Домашнее задание

1. Башни-близнецы под названием «Ворота Европы» в городе Мадриде являются наклонными призмами, которые расположенны друг на против друга. Их высота 115м. Башни наклонены по направлению друг к другу. Угол наклона зданий друг к другу 30°. В интернете нет информации о длине бокового ребра здания. Найдите его длину, основываясь на имеющихся у нас данных. Ответ округлите до десятков метров (рис.145).

рис.145

2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – наклонная шестиугольная призма, высота которой равна ребру основания, а вершина A_1 проецируется на плоскость (ABC) в точку O – центр основания. В основании призмы лежит правильный шестиугольник.
а) докажите, что угол наклона призмы равен 45°;
б) найдите угол между прямыми AB_1 и E_1D_1.

Тема 27.3 Наклонная призма. Закрепление материала

№1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонная призма, в основании которой квадрат. Точка A_1 проецируется в точку H на ребре AB так, что $AH : HB = 1 : 2$. Угол наклона бокового ребра 60°.
а) докажите, что площади граней ABCD и AA_1D_1D относятся друг к другу как 3:2;
б) найдите диагональ призмы BD_1, если $AH=\sqrt{3}$, $HB=2\sqrt{3}$.

№2. $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма, в основании ABC $AB=BC$, $\angle ABC=120°$, вершина C_1 проецируется в точку H – середину AC. Угол наклона бокового ребра к основанию 30°.
а) докажите, что грань BCC_1B_1 – ромб;
б) найдите площадь этой грани, если $BC=2$.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма, в основании которой правильный треугольник ABC, вершина A_1 проецируется в точку O – середину высоты треугольника AH. Угол наклона бокового ребра к основанию равен $30°$.
а) докажите, что $AA_1:AB=1:2$;
б) найдите площадь сечения плоскостью (AA_1H), если $AB=4$.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонная призма, все рёбра основания равны 7, а боковые рёбра равны 14. Точка C_1 проецируется на плоскость (ABC) в точку H, лежащую на продолжении ребра BC за точку C. Боковые рёбра наклонены под углом $60°$ к плоскости основания.
а) докажите, что $BB_1=D_1H$;
б) найдите отношение площадей BCC_1B_1 и $ABCD$.

2. $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма, $AB=4$, $BC=3$, $AC=5$, боковые рёбра равны 5. Точка B_1 проецируется на плоскость (ABC) в точку H – продолжение ребра AB за точку B, $BH=3$.
а) докажите, что $CB_1=BC_1$;
б) найдите отношение площадей ABC и ABB_1A_1.

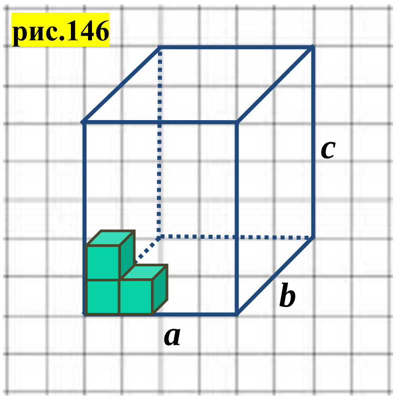
Тема 28.1 Объём призмы и пирамиды. Понятие и формула объёма

Одна из основных характеристик пространственных фигур – это их объём. Сформулируем определение объёма:

Объём – мера, показывающая величину части пространства, которую ограничивает замкнутая геометрическая фигура.

Объём измеряют в кубических единицах: $мм^3, см^3, м^3$. Один кубический сантиметр равен объёму куба с ребром 1см. Ещё объём измеряют в литрах: $1л = 1000см^3$.

рис.146



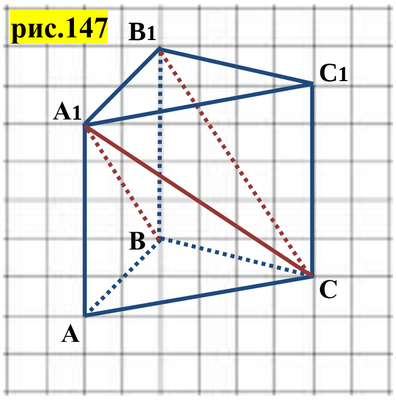
Прямоугольный параллелепипед обладает тремя измерениями: длиной a, шириной b, высотой c. Его можно разделить на единичные кубы. Сначала выложим первый слой единичными кубами, затем на него выложим второй, и так далее. Каждый слой содержит ab единичных кубов, а количество вмещаемых слоёв будет равно c. Делаем вывод:

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений: $V = abc$.

В любой призме можно поступить таким же образом: замостить основание единичными кубами, их число будет соответствовать площади $S_{осн}$; затем выкладывать сверху последующие слои, которых будет столько, какова высота призмы h.

Объём призмы равен произведению площади её основания на высоту: $V = S_{осн} \cdot h$.

рис.147



В частности, рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Разобьём её на три пирамиды: A_1ABC, $A_1CC_1B_1$, A_1CBB_1. У пирамид $A_1CC_1B_1$ и A_1CBB_1 сторона A_1C – общая и треугольники CC_1B_1 и CBB_1 равны, следовательно, эти пирамиды равные. У пирамид A_1ABC и A_1CBB_1 сторона A_1C – общая и треугольники A_1AB и A_1BB_1 равны, следовательно, эти пирамиды тоже равные. Вывод – все три пирамиды равны, значит и их объёмы равны. Тогда объём одной пирамиды равен третьей части от объёма исходной призмы. Любая другая многоугольная пирамида может быть разделена на треугольные пирамиды одинаковой высоты с общей вершиной, и сумма площадей всех их оснований будет равна площади основания исходной пирамиды.

Объём пирамиды равен трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h$.

Если фигуру разбить на части, то её объём равен сумме объёмов всех частей.

№1. Дан куб. Выполните ряд заданий:
а) найдите его объём, если ребро равно 7;
б) найдите его ребро, если объём равен 216;
в) найдите его объём, если его диагональ равна $\sqrt{75}$;
г) найдите его объём, если площадь поверхности равна 96;

№2. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC с прямым углом B, где BC=5, AC=$\sqrt{29}$, высота призмы равна 4. Найдите объём данной призмы.

№3. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб ABCD, у которого $\angle ABC=135°$ и сторона $\sqrt{8}$, а высота призмы равна $\sqrt{18}$. Найдите объём данной призмы.

№4. В правильной шестиугольной призме ребро основания равно 2, боковое ребро равно $5\sqrt{3}$. Найдите объём призмы.

Домашнее задание

1. Объём правильной четырёхугольной призмы равен 72, а её высота равна 8. Найдите площадь полной поверхности этой призмы.

2. В основании призмы лежит треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{14}$. Высота призмы $\sqrt{27}$. Найдите объём призмы.

Тема 28.2 Объём призмы и пирамиды. Решение задач

№1. Найдите объём правильного тетраэдра с ребром *a*.

№2. В правильной четырёхугольной пирамиде ребро основания равно $\sqrt{2}$, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите объём данной пирамиды.

№3. В правильном тетраэдре SABC с ребром 3 точка K – середина ребра SC. Найдите объём пирамиды KABC.

№4. Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 9 и боковой стороной 5. Объём призмы равен 30. Найдите высоту призмы.

№5. Основаниями усечённой пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются квадраты со стороной $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$. Высота усечённой пирамиды равна 2. Найдите объём многогранника.

Домашнее задание

1. Объём правильной четырёхугольной пирамиды равен 84, а её высота равна 7. Найдите ребро основания пирамиды.

2. В правильной треугольной пирамиде ребро основания равно 4, а высота равна $\sqrt{12}$. Найдите объём пирамиды.

3. Объём куба равен 343. Найдите площадь полной поверхности этого куба.

Тема 28.3 Объём призмы и пирамиды. Решение задач

№1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K делит ребро BB_1 в соотношении 3:1, считая от вершины B. Проведено сечение через точки A, C, K. Найдите отношение объёмов двух частей, на которые сечение разделило куб.

№2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3 точка P и K лежат на ребрах A_1B_1 и B_1C_1 так, что $B_1P=B_1K=1$. Через точки A, P, K проходит сечение. Найдите отношение объёмов фигур, на которые это сечение делит куб.

№3. MABCDEF – пирамида, в основании которой правильный шестиугольник со стороной 2, боковое ребро MA перпендикулярно основанию, а угол между прямой MD и плоскостью основания равен 60°. Найдите объём пирамиды.

№4. Все рёбра правильной треугольной призмы равны между собой. Объём призмы равен 18. Найдите площадь боковой поверхности данной призмы.

№5. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с ребром основания $4\sqrt{3}$ боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Точка K делит ребро SA в соотношении 1:2, считая от точки A. Найдите объём пирамиды KABCD.

Домашнее задание

1. Объём правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен $3\sqrt{3}$, а ребро основания равно 2. Точка K – середина ребра BC. Найдите угол между прямой A_1K и плоскостью (ABC).

2. MABCD – четырёхугольная пирамида, грань MAB перпендикулярна прямоугольному основанию ABCD, AB=2, BC=$3\sqrt{10}$, MC=MD=10. Найдите объём пирамиды MABC.

3. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. В ней проведено сечение через точки A, C, B_1. Найдите отношение объёмов двух частей, на которые сечение разделило призму.

Тема 28.4 Объём призмы и пирамиды. Решение задач

№1. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка К делит ребро SA в соотношении 1:2, считая от точки S. Через точки B, D, K проходит сечение. Найдите отношение объёмов частей, на которые это сечение делит пирамиду.

№2. В правильной четырёхугольной пирамиде середины боковых рёбер являются вершинами куба, а другие четыре его вершины расположены в плоскости основания пирамиды. Найдите отношение объёмов куба и пирамиды.

№3. В основании наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной 4, боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Точка H – середина ребра BC и является проекцией точки C_1 на плоскость основания. Найдите объём призмы.

№4. В основании наклонной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб со стороной 13. Диагональ BD=10, а боковые ребра призмы равны 20. Точка O – пересечение диагоналей ромба и является проекцией точки C_1 на плоскость основания. Найдите объём призмы.

№5. Бипирамида состоит из двух равных правильных четырёхугольных пирамид, все рёбра которых одинаковы. Объём бипирамиды равен $72\sqrt{2}$. Найдите ребро пирамиды.

Домашнее задание

1. Найдите объём бипирамиды, образованной двумя равными правильными шестиугольными пирамидами с рёбрами основания 4 и боковыми рёбрами 8.

2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма с ребром основания a, точка M – центр верхнего основания призмы. MABCDEF – пирамида, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

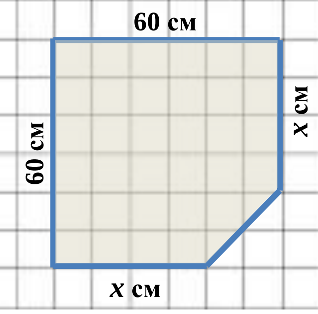
а) докажите, что AM=BE;

б) докажите, что объём пирамиды равен трети объёма призмы.

Тема 28.5 Объём призмы и пирамиды. Решение практических задач

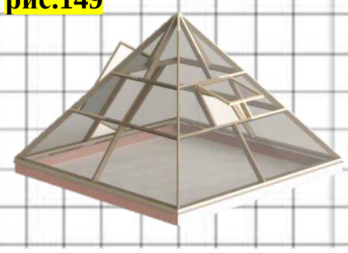
№1. Планируется собрать контейнер в форме прямой призмы, дно которого выглядит, как на рисунке 148. Фигура, полученная отсечением от квадрата его угла с равными сторонами. Найдите значение x, при котором объём контейнера будет равен 171,9л при высоте контейнера 50см. (Учитывайте, что в 1 литре – 1000см^3).

рис.148



№2. Теплица для выращивания растений имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды, которая занимает участок земли 8×8м. Объём воздуха, который должен содержаться в теплице с учётом вида и количества растений – примерно 104м^3. На какой высоте должна располагаться вершина теплицы, чтобы выполнить данную рекомендацию? Ответ округлите до 0,1м. (рис.149)

рис.149



№3. Воду для полива огорода хранили в баке, имеющем форму правильной четырёхугольной призмы, рёбра основания которой были 50см, а максимальный уровень высоты воды достигал 144см. Но этот бак слишком высокий, и поэтому он не удобен для использования. Вместо него изготовили похожий бак с рёбрами основания 60см. На какой максимальной высоте будет располагаться вода в этом баке?

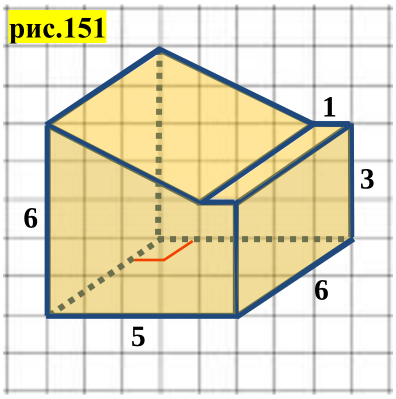
рис.150

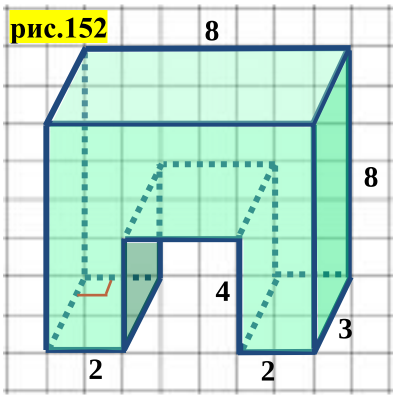
№4. Для награждения спортсменов из гранита изготовили пьедестал, состоящий из трёх правильных четырёхугольных призм-ступенек, одинаковых по основанию 30×30см, но разных по высоте: третье место – 25см, второе место – 30см, первое место – 35см. (рис.150). Стоимость кубического метра гранита 40000 рублей. Стоимость обработки – 20% от стоимости материала. Какова стоимость изготовленного пьедестала?

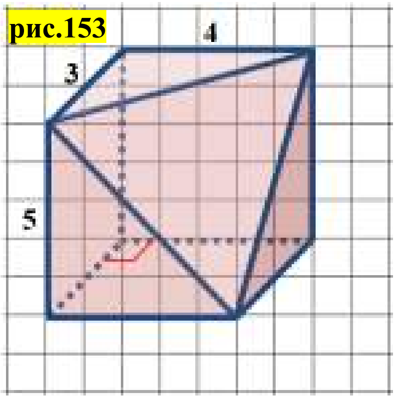
№5. В химической лаборатории колба для реагента имеет форму правильной треугольной призмы с ребром основания 5см и высотой 10см. В колбе налито 40% вещества A. Остальное надо долить веществом B. Сколько миллилитров вещества B надо долить? Округлите ответ до целого.

Домашнее задание

1. Найдите объём деталей по их чертежу.







Тема 29.1 Расстояние от точки до плоскости. Метод объёмов

Расстояние от точки до плоскости – есть длина перпендикуляра, проведённого из данной точки на данную плоскость. Для его поиска можно воспользоваться методом объёмов. Надо связать точку и плоскость в единую фигуру – пирамиду. Тогда расстояние между ними будет являться её высотой. Выразим высоту пирамиды: $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h \implies h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}}}$

Если объём пирамиды можно найти заранее другим способом, и площадь грани, к которой проведена эта высота, то данный метод позволяет узнать расстояние от точки до плоскости.

№1. Площадь основания пирамиды равна 80, а её объём равен 408. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости её основания.

№2. Основание пирамиды – параллелограмм со сторонами 13 и $2\sqrt{2}$ и углом 45°. Объём пирамиды равен 156. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости её основания.

№3. В четырёхугольной пирамиде MABCD основанием является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Объём пирамиды равен 30. Найдите расстояние от точки M до плоскости (ABC).

№4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4. Найдите расстояние от точки D_1 до сечения (A_1C_1D).

№5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с рёбрами AB=BC=8, BB_1=34. Точка К – середина BB_1. Найдите расстояние от точки В до плоскости сечения (АКС).

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояние от точки B до (ACB_1).

2. Ребро основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3, высота 7, точка К делит BB_1 в соотношении 4:3, считая от В. Проведено сечение через точки А, С, К. Найдите расстояние от точки В до плоскости сечения.

Тема 29.2 Расстояние от точки до плоскости. Решение задач

№1. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD ребро основания равно 2, боковое ребро $\sqrt{11}$. Точка О – центр основания. Найдите расстояние от точки О до плоскости (MCD).

№2. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC с прямым углом B, AB=1, AC=$\sqrt{17}$, AA_1=$\sqrt{8}$. Плоскость β проходит через точки A_1, B_1, C. На какую величину точка C_1 ближе к плоскости β чем точка A?

№3. В пирамиде MABC основание – треугольник ABC с прямым углом B, ребро MA=8 перпендикулярно основанию и составляет с ребром MB угол 45°, AC=10. Точка К лежит на MA так, что MK=2. Найдите расстояние от точки A до (KBC).

№4. Ребро основания правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8, высота 3, точка К – середина AD. Через точки A_1, C_1, К проходит плоскость β. Докажите, что расстояние от точки D до β меньше чем до $(D_1C_1B_1)$.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от точки A до плоскости (BDC_1).

2. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – правильная шестиугольная призма с ребром основания 4 и боковым ребром 3. Найдите расстояние от точки F до плоскости (ACB_1).

Тема 29.3 Расстояние от точки до плоскости. Решение задач

№1. Ребро SB пирамиды SABCD перпендикулярно плоскости основания, ABCD – квадрат со стороной 6. Точка M – середина SC, угол между прямыми CD и AM равен 30°. Найти расстояние от точки B до плоскости (SAD).

№2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка лежит на продолжении ребра BC так, что BC=CE. Точка M лежит на продолжении прямой A_1C_1 так, что $A_1C_1=C_1M$.

а) докажите, что объём MA_1BE составляет $\frac{2}{3}$ объёма куба;

б) найдите расстояние от E до (BMA_1), если объём куба 216.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка K делит ребро AB так, что AK:KB=2:1. Точка P делит ребро CD так, что DP:PC=5:1.

а) докажите, что (B_1KP) пересекает ребро CC_1 в его середине;

б) найдите объём меньшей из двух частей, на которые плоскость (B_1KP) делит куб, если его ребро равно 6.

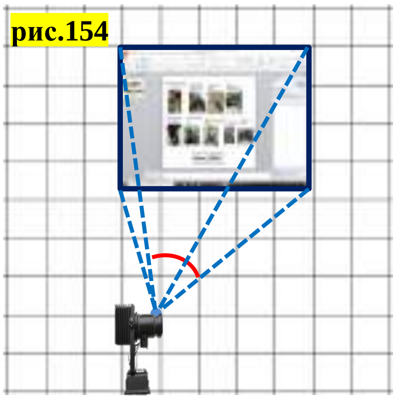
№4. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 4 и высотой 3. Точка K – середина AC. Точка P лежит на BB_1, BP=1. Проведено сечение через точки A_1, P, K.

а) докажите, что сечение делит ребро BC в соотношении 1:3;

б) найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PK.

Домашнее задание

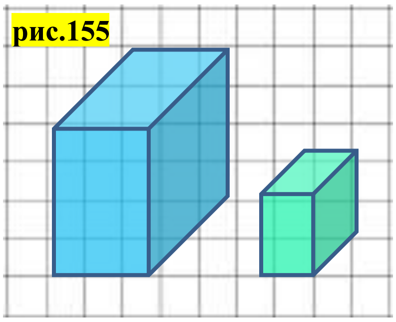
1. Проектор отображает прямоугольную картинку в формате 4×3. Угол между лучами в левый верхний и правый нижний край картинки равен 60°. Объектив проектора располагается прямо перед центром изображения. На каком расстоянии от стены его надо установить, чтобы проецируемое изображение имело размер 180×135см? Полученный ответ округлите до целого числа метров (рис.154).



2. SABCD – правильная четырёхугольная пирамида, у которой все рёбра равны x. Выведите формулу расстояния от точки A до доковой грани SBC.

Тема 30.1 Подобие в пространстве

Подобные фигуры в пространстве, как и на плоскости, одинаковы по форме, но разные по размеру. Все линейные размеры подобных фигур отличаются в k-раз, а углы между сходственными элементами (рёбрами и гранями) сохраняются. Число k называют коэффициентом подобия.



Если линейные размеры подобных фигур отличаются в k раз, то площади их поверхностей отличаются в k^2 раз, а объёмы в k^3 раз.

Какие фигуры можно считать подобными? Любой из видов правильных многогранников. Например, все тетраэдры. Для других многогранников необходимо доказать пропорциональность их сходственных рёбер и равенство сходственных углов. Например, два прямоугольных параллелепипеда подобны, если три измерения одного – длина, ширина, высота, пропорциональны трём измерениям другого параллелепипеда.

№1. Определите истинность утверждений, исправьте ошибки:

1) Если сторону квадрата увеличить в 7 раз, то его площадь увеличится в 14 раз;

2) Если сторону правильного треугольника уменьшить в 6 раз, то площадь уменьшится в 36 раз;

3) Если площадь первого круга больше площади второго в 10 раз, то и радиус в 10 раз больше;

№2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед с рёбрами AB=18, BC=27, CC_1=12. Точка M лежит на ребре BC так, что CM=19. Плоскость сечения проходит через точку M параллельно плоскости (ABB_1) и делит параллелепипед на два неравных параллелепипеда. Докажите, что исходный параллелепипед подобен меньшему из двух полученных.

№3. Ребро первого куба в 5 раз больше ребра второго.

а) во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго?;

б) найдите отношение объёмов первого и второго кубов.

№4. Площадь поверхности первого правильного тетраэдра в 16 раз больше, чем у второго правильного тетраэдра.
а) найдите отношение рёбер первого и второго тетраэдров;
б) найдите отношение объёмов первого и второго тетраэдров.

№5. Объём первого правильного октаэдра на 700% больше объёма второго.
а) найдите площадь первого, если площадь второго равна 7;
б) получили третий тетраэдр, ребро которого равно сумме рёбер первых двух, на сколько процентов площадь его поверхности больше площади поверхности первого?

№6. Две треугольные призмы подобны. Объём первой равен 135, объём второй равен 320. Площадь поверхности второй призмы равна 150, найдите площадь поверхности первой.

Домашнее задание

1. Во сколько раз увеличатся площадь и объём призмы, если все её рёбра увеличить в 7 раз?

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с площадью поверхности, равной 300. Площадь поверхности другого куба равна 75. Во сколько раз отличаются ребра этих кубов?

3. В ряд поставили 5 правильных тетраэдров, каждый следующий имеет ребро в 2 раза больше, чем предыдущий.
а) во сколько раз объём пятого больше, чем объём второго?;
б) во сколько раз площадь поверхности четвертого тетраэдра больше, чем у первого?

Тема 30.2 Сравнительный анализ объёмов и площадей

№1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и K – середины рёбер AB и AC, точки M_1 и K_1 – середины рёбер A_1B_1 и A_1C_1. Плоскость, проходящая через точки M, K, M_1, K_1 делит данную призму на две части. Образовались ли подобные фигуры?
а) объём исходной призмы равен 32, чему равен объём большей из отсечённых частей?;
б) площадь боковой поверхности меньшей из отсеченных частей равна 14, найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.

№2. В правильной треугольной пирамиде MABC точки K, P, T делят рёбра MA, MB, MC в соотношении 1:5, считая от вершины пирамиды. Являются ли пирамиды MKPT и MABC подобными?
а) объём пирамиды MKPT равен 3, найдите объём MABC;
б) площадь поверхности пирамиды MABC равна 108, чему равна площадь поверхности MKPT?

№3. Высоту правильной четырёхугольной пирамиды увеличили в 3 раза, а ребро основания уменьшили в 2 раза. Получилась ли при этом пирамида, подобная исходной? На сколько процентов уменьшился объём пирамиды?

№4. Высоту призмы уменьшили в 4 раза, а площадь основания уменьшили в 16 раз. Пусть объём исходной призмы равен 320, чему будет равен объём уменьшенной призмы?

№5. Имеются два сосуда в форме правильной треугольной призмы. В первом сосуде уровень воды достигает 72см. Второй сосуд пустой, он имеет ребро основания в 3 раза больше, чем у первого. Всю воду из первого сосуда перелили во второй. На какой высоте будет вода в нём?

№6. Имеются две гири из одинакового материала в форме правильной четырёхугольной пирамиды. Основания пирамид равные. Первая гиря имеет массу 300г и высоту 12см, вторая гиря имеет массу 500г. Какова высота второй гири?

№7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания равна 30, а высота равна 5. Найдите объём многогранника с вершинами $ABCB_1$.

№8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ площадь основания равна 40, а высота равна 6. Найдите объём многогранника с вершинами $ABCDB_1$.

Домашнее задание

1. Во сколько раз увеличится объём правильной треугольной призмы, если рёбра основания увеличить в 2 раза, а высоту в 3 раза?

2. Во сколько раз увеличится объём правильной четырёхугольной приремиды, если рёбра основания увеличить в 6 раз, а высоту уменьшить в 2 раза?

3. Имеются два сосуда в форме правильной шестиугольной призмы. В первом сосуде уровень воды достигает 48см. Второй сосуд пустой, он имеет ребро основания в 4 раза больше, чем у первого. Всю воду из первого сосуда перелили во второй. На какой высоте будет вода в нём?

Тема 30.3 Сравнительный анализ объёмов и площадей. Закрепление материала

№1. Площадь поверхности первого куба в 4 раза больше, чем у второго, но в 9 раз меньше, чем у третьего. Во сколько раз объём третьего куба больше объёма второго?

№2. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки К, Р, Т – середины рёбер АВ, ВС, B_1C_1.Через точки К, Р, Т проведено сечение, делящее призму на две части. Объём большей из этих частей равен 14. Чему равен объём исходной призмы?

№3. SABC – правильный тетраэдр. Точки М, Р, К лежат на рёбрах АВ, АС, AS так, что отношения АМ : МВ = АР : РС = АК : КS = 2 : 3.

а) докажите, что площадь поверхности тетраэдра АМРК составляет 16% от площади поверхности тетраэдра SABC;

б) пусть высота тетраэдра АМРК равна 18, найдите высоту тетраэдра SABC.

№4. MABCD – пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами АВ=4, ВС=9. Высота пирамиды МО, где О – центр основания. Точки К, Р, Е – середины рёбер АВ, AD и АМ. Высота пирамиды ЕАКОР равна 4. Из большой пирамиды MABCD вырезают малую ЕАКОР. Чему равен объём оставшегося многогранника?

№5. Имеется бесконечная последовательность кубов, первый из них имеет ребро a см, каждый следующий имеет ребро в $\sqrt{2}$ меньше предыдущего. На покраску 12см^2 поверхности требуется 1г краски. Сколько краски уйдёт на то, чтобы покрасить множество всех этих кубов?

Домашнее задание

1. Объём куба равен 84. Найдите объём пирамиды, у которой основание совпадает с основанием куба, а вершина находится в центре куба.

2. Объём пирамиды SABCD равен 128. Найдите объём пирамиды с основанием АВС и вершиной на середине ребра SD.

3. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма. Точка К – середина АВ, точка М лежит на ВС так, что ВМ : МС = 3 : 1. Найдите отношение объёмов фигур $BMKB_1$ и $ABCA_1B_1C_1$.

Тема 31.1 Геометрия и вероятность

Классическое определение вероятности:

Вероятностью $P(A)$ случайного события A называется отношение числа благоприятных исходов эксперимента к числу всех возможных исходов.

Задачи на вероятность с геометрическим содержанием имеют свою специфику. Они могут быть по содержанию как чисто математическими, развивающими общую логическую культуру, так и прикладными. Задачи можно поделить на те, которые относятся к знаниям разных геометрических фактов, и на те, в которых речь идёт только о соотношении площадей или объёмов.

№1. В окружности выбирается произвольная точка.

а) с какой вероятностью она окажется её центром?;

б) с какой вероятностью она окажется на её диаметре?;

в) с какой вероятностью она окажется в верхнем полукруге?

№2. В правильном треугольнике проводят все медианы. Вася и Петя случайным образом по очереди будут раскрашивать по одной из полученных частей треугольника. Вася начинает первым. С какой вероятностью за второй ход Петя закрасит часть, которая будет граничить с уже закрашенной?

№3. В правильном 11-угольнике $A_1A_2A_3...A_{11}$ учитель попросил ученика провести одну из диагоналей из точки A_1. С какой вероятностью ученик проведёт её в точку A_5?

№4. В наборе есть игральный кубик в форме октаэдра и в форме икосаэдра. Все грани этих кубиков пронумерованы по порядку. Во сколько раз выпадение единицы на октаэдре более вероятно, чем выпадение двойки на икосаэдре?

№5. В случайный момент времени часы могут сломаться. Какова вероятность того, что часовая стрелка остановится между пятёркой и восьмёркой? Между тройкой и девяткой?

№6. В классической игре «морской бой» поле 10×10 клеток, на котором 4 одноклеточных, 3 двухклеточных, 2 трёхклеточных, один четырёхчлеточный корабли. Игрок делает первый ход.

а) с какой вероятностью он попадёт в какой-либо корабль?

б) пусть некоторый корабль поражён при первом выстреле. Какова вероятность того, что он трёхклеточный?

№7. Мишень игры дартс состоит из пяти колец, примем их радиусы за 1, 2, 3, 4, 5. Пусть игрок N попадает в мишень всегда. С какой вероятностью он попадёт в среднее из пяти колец?

№8. Трапеция ABCD имеет основания BC=3 и AD=12. Найти вероятность того, что точка, случайно поставленная внутри трапеции, окажется внутри треугольника BCD.

№9. Треугольник АВС – правильный. Точка К – середина АВ, точка М лежит на ВС так, что ВМ : МС = 1 : 4. Найти вероятность того, что точка, поставленная внутри треугольника АВС, окажется внутри треугольника МКВ.

Домашнее задание

1. Правильный шестиугольник разрезали по всем его диагоналям. Из полученных фигурок выбрали наугад одну. Какова вероятность того, что она является треугольником?

2. В квадрате ABCD точка Е – середина CD. Диагональ АС пересекает прямую ВЕ в точке О. Найдите вероятность того, что точка, поставленная в квадрате, окажется внутри AOED.

Тема 31.2 Геометрия и вероятность. Закрепление материала

№1. В квадрат вписана окружность. Внутри квадрата выбирают случайную точку. Докажите, что вероятность её попадания внутрь круга выше, чем 0,75.

№2. В треугольнике АВС медианы АМ и ВЕ пересекаются в точке О. Внутри треугольника АВС выбирают случайную точку. Докажите, что вероятность её попадания внутрь треугольника АОВ меньше, чем 0,35.

№3. Сумма двух положительных чисел меньше 5. С какой вероятностью их разность больше 2?

№4. Два здания находятся к северу и к востоку от перекрёстка. Расстояние между ними по прямой не превосходит 6км. Что более вероятно: что расстояние между ними по дороге через данный перекрёсток больше 6км, или то, что оно меньше 6км?

№5. Внутри куба находится случайная точка М. Угол куба отпиливают через середины трёх смежных рёбер, и выбрасывают его. Какова вероятность того, что точка М всё ещё будет находиться внутри оставшейся фигуры?

№6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка К – середина ребра АВ, точка Р делит ребро ВС в соотношении 1:2, считая от В. Через точки К, Р и параллельно боковому ребру призмы проведено сечение, делящее призму на две неравные части. Какова вероятность того, что случайно «заброшенная» в призму точка окажется в большей из двух частей?

Домашнее задание

1. Прямоугольник устроен так, что его стороны – натуральные числа. Периметр прямоугольника не превосходит 20. Какова вероятность того, что его площадь строго больше 9?

2. Точка К – середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какова вероятность того, что точка, случайно выбранная внутри куба, окажется внутри пирамиды КАВС?

Тема 32.1 Подведение итогов главы. Решение задач на закрепление материала

№1. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 6. Точка М лежит на ребре AA_1 так, что АМ=2, точка К лежит на ребре CC_1 так, что СК=1. Плоскость β проходит через точки К, B_1, М и делит призму на два многогранника.
а) докажите, что объёмы этих многогранников равны;
б) найдите объём многогранника АВСКМ.

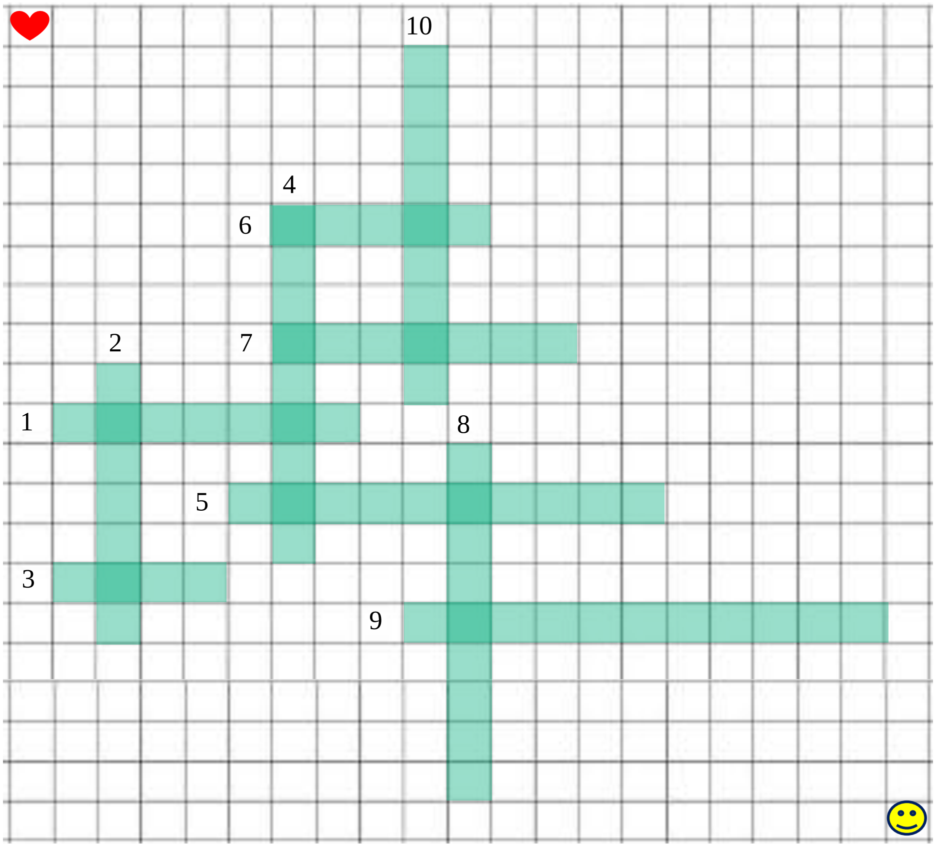
№2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки М и К – середины рёбер A_1B_1 и A_1C_1. Через точки А, М, К провели сечение, которое разделило призму на две части.
а) докажите, что отношение объёмов этих частей равно 1:11;
б) ребро основания равно 2, боковое ребро 3, найдите расстояние от A_1 до плоскости сечения.

№3. Основание наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник АВС с прямым углом В. Точка Н – основание перпендикуляра, опущенного из угла В на АС. Точка B_1 проецируется на плоскость АВС точно в точку Н, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°.
а) докажите, что площадь сечения, проходящего через точки В, B_1, Н равна квадрату отрезка ВН;
б) найдите объём данной призмы, если АВ=30, ВС=40.

№4. Основания четырёхугольной пирамиды и куба совпадают, вершина пирамиды лежит в центре противоположного основания куба.
а) докажите, что отношение объёмов пирамиды и куба 1:3;
б) объём куба равен 216, найдите боковое ребро пирамиды.

Домашнее задание

1. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь. Вопросы переписывать не нужно.



1. Совокупность граней, исключающая основания многогранника, называется (...) поверхность.
2. Понятие, означающее, что две фигуры имеют одинаковую форму, но различны в размере.
3. Один кубический дециметр.
4. Грань пирамиды, противоположная к её вершине.
5. Многогранник, полученный из двух равных пирамид с общим основанием.
6. Мера, показывающая часть пространства, ограниченную геометрическим телом.
7. Правильный многогранник с восьмью гранями.
8. Призма, боковые грани которой не прямоугольные.
9. Внешняя видимая часть многогранника.
10. Пирамида, полученная от обычной пирамиды, путём отсечения её части плоскостью, параллельной основанию.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M лежит на ребре CC_1 так, что $C_1M : MC = 1 : 2$. Плоскость (BMD) делит куб на две части.
а) докажите, что отношение их объёмов равно 1 : 8;
б) ребро куба равно 6, найдите расстояние от C_1 до (BMD).

Тема 32.2 Подведение итогов главы. Решение задач на закрепление материала

№1. Флорариум собран из стекла в форме правильного икосаэдра, у которого отсутствуют 5 граней. Для сборки использован пластиковый каркас, сдержащий все рёбра данной поверхности. Общая длина каркаса, составила 2м. Найдите площадь стекла, которое использовали для данного изделия? Ответ дайте в см², округлив его до десятков.

рис.156

№2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка К – середина ребра CC_1. Проведено сечение через точки A, D, K, являющееся основанием пирамиды с вершиной D_1.
а) докажите, что основание пирамиды и её грань KDD_1 перпендикулярны;
б) найдите объём пирамиды, если AB=4, BC=5, CC_1=6.

№3. $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма с правильным треугольником в основании, у которой угол наклона рёбер равен 45°, точка A_1 проецируется на плоскость (ABC) в точку С. Ребро основания призмы равно $\sqrt{3}$. Найдите объём призмы.

№4. В пирамиде MABC основание – треугольник ABC с прямым углом B, AB=9, BC=20. Ребро MA перпендикулярно плоскости (ABC) и равно 12.

а) докажите, что (ABM) ⊥ (MBC);

б) найдите расстояние от точки B до плоскости (AMC).

Домашнее задание

1. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания $12\sqrt{2}$ и боковым ребром 13. Точка E делит высоту пирамиды в соотношении 1:4, считая от основания. Найдите объём EACD.

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $\sqrt{12}$ боковое ребро $\sqrt{3}$.

а) найдите объём пирамиды $ABCC_1B_1$;

б) найдите площадь поверхности пирамиды $AA_1B_1C_1$.

Тема 32.3 Подведение итогов главы. Решение задач на закрепление материала

№1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, в котором точки K и P – середины рёбер AA_1 и A_1B_1. Через точки K, P, C_1 провели сечение, делящее куб на две части. Верхнюю часть покрасили синим, нижнюю – красным. Какова вероятность, что случайно выбранная точка на поверхности куба будет красной?

№2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонная призма с квадратным основанием, ребро основания 4. Точка B_1 проецируется точно в C. Боковое ребро призмы равно 10, угол наклона рёбер 30°.

№3. SABCD – пирамида, в основании которой квадрат ABCD со стороной $6\sqrt{2}$. Ребро SA=10, SB=$\sqrt{76}$. Точка E – середина DC, отрезки AC и BE пересекаются в точке O, SO=6.

а) докажите, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC;

б) найдите объем пирамиды SAOED.

№4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC, точки H и E лежат на рёбрах AB и AC так, что BH : HA = AM : MC = 1 : 2, SH – высота пирамиды.

а) докажите, что прямые SM и AC перпендикулярны;

б) найти объём пирамиды SMHBC, если AB=6, $\angle SMH = 45°$.

Домашнее задание

1. В правильной прямоугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра основания равны 10, боковые рёбра 12. Точки M и K – середины рёбер A_1B_1 и B_1C_1. Через точки M, K, C провели сечение.

а) найдите объём меньшей из частей, на которые сечение делит призму;

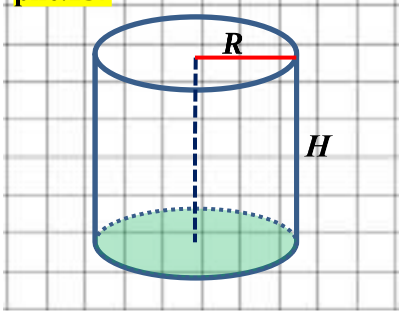
б) найдите расстояние от точки B до плоскости сечения;

в) найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Тема 33.1 Цилиндр и его свойства. Теоретические основы

Кроме многогранников мы рассмотрим тела, полученные путём вращения плоской фигуры вокруг некоторой оси.

рис.157



Круговой цилиндр – тело, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Основания цилиндра – равные окружности, лежащие в параллельных плоскостях. Радиус цилиндра – это радиус его основания. Боковая поверхность, если её развернуть, является прямоугольником.

Отрезок, соединяющий две точки оснований цилиндра и перпендикулярный им – есть образующая цилиндра, она равна его высоте. Ось цилиндра – высота, соединяющая центры оснований.

Объём цилиндра, как и у призмы, равен произведению площади основания на высоту. Учитывая, что в основании лежит круг, получаем формулу: $\boldsymbol{V_{ц} = \pi R^2 H}$.

Площадь боковой поверхности равна площади прямоугольника, образуемого при её развороте, его длина совпадает с длиной окружности, а ширина с высотой цилиндра. Учитывая это, получаем формулу: $\boldsymbol{S_{бок} = 2\pi R H}$.

Площадь полной поверхности представлена суммой площадей двух оснований и боковой поверхности: $\boldsymbol{S_{пол} = 2\pi R^2 + 2\pi R H}$.

№1. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра с радиусом 5 и высотой 4.

№2. Площадь полной поверхности цилиндра равна 54π, а его высота 6. Найдите его радиус.

№3. Площадь боковой поверхности у первого цилиндра равна 160, а у второго цилиндра радиус в 2 раза меньше, высота в 3 раза больше. Найти площадь боковой поверхности второго цилиндра.

№4. Даны два цилиндра. У второго высота в 2 раза меньше, радиус основания в 3 раза больше. Во сколько раз объем второго больше, чем объем первого?

№5. Даны два цилиндра. У второго высота в 5 раз больше, радиус основания в 2 раза меньше. Во сколько раз объем второго больше, чем объем первого?

№6. В сосуде цилиндрической формы налито 800 мл воды, уровень воды достигает 20 см. В него погружают деталь, и уровень воды поднимается на 5 см. Найти объём детали.

№7. В сосуде цилиндрической формы налито 1200 мл воды, уровень воды достигает 45 см. На какой высоте будет вода, если перелить её в сосуд с радиусов в 1,5 раза больше?

№8. Из пластика изготавливают деталь определенной формы. Рассмотрим два цилиндра с общей осью и высотой 5см. Радиус большого цилиндра равен 6см, радиус малого цилиндра равен 2см. Из большого цилиндра «вырезают» меньший. Найдите площадь полной поверхности получившейся детали.

Домашнее задание

1. Даны два цилиндра. Радиус и высота у первого 2см и 6см, и второго 4см и 3см. Найдите отношение объёмов этих цилиндров.

2. Длина окружности основания цилиндра равна 16. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 24. Чему равна высота цилиндра?

3. В сосуде цилиндрической формы налито 2000 мл воды, уровень воды достигает 30 см. В него погружают деталь, и уровень воды поднимается на 9 см. Найти объём детали.

Тема 33.2 Цилиндр и его свойства. Сечения цилиндра

Сечения цилиндра различны. Если сечение параллельно основанию, то получим окружность. Если плоскость сечения находится под острым углом к основанию, то получим эллипс. Если сечение перпендикулярно основанию, то получим прямоугольник.

№1. Радиус цилиндра равен 7, образующая равна 10.

а) найдите площадь сечения, проходящего через ось цилиндра перпендикулярно его основаниям;

б) найдите площадь полной поверхности цилиндра.

№2. Диаметр цилиндра $4\sqrt{3}$. Расстояние от центра нижнего основания до точки на окружности верхнего основания равно 4.

а) найдите площадь сечения, проходящего через ось цилиндра перпендикулярно его основаниям;

б) найдите объём цилиндра.

№3. Объём цилиндра равен 100π , а его высота равна 4.

а) докажите, что отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади сечения, проходящего через ось цилиндра перпендикулярно его основанию всегда равно π;

б) найдите площадь полной поверхности цилиндра.

№4. Радиус цилиндра равен 65, высота равна 10.

а) сечение проходит перпендикулярно основаниям и удалено от оси цилиндра на расстояние 16, найдите его площадь;

б) площадь сечения перпендикулярного основаниям, равна 660, найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра.

№5. Радиус цилиндра 85, высота 5. Проведены два сечения перпендикулярных плоскости основания. Их площади 360 и 130. Найдите расстояние между плоскостями данных сечений.

Домашнее задание

1. Дан цилиндр высотой 9 и радиусом 20. Сечение, перпендикулярное основаниям цилиндра удалено от оси цилиндра на расстояние 12. Найдите площадь этого сечения.

2. Радиус основания цилиндра равен 5, высота равна 6. Сечение, параллельное основаниям цилиндра делит его высоту на отрезки 4см и 2см. Найдите объём большей из частей, которые получились при делении цилиндра этим сечением.

Тема 33.3 Цилиндр и его свойства. Решение задач

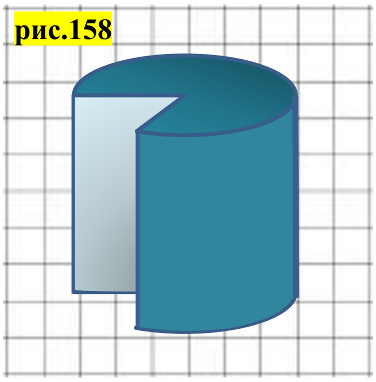


рис.158

№1. На рисунке 158 изображена часть цилиндра, полученная отсечением от него цилиндрического сектора с углом 60°, высота цилиндра 6, радиус 2. Найдите объём фигуры.

№2. В цилиндре точки A и B лежат на окружности нижнего основания, точки M и K лежат на окружности верхнего основания так, что BK – образующая цилиндра, MA пересекает ось цилиндра.

а) докажите, что прямые AB и BM перпендикулярны;

б) найдите расстояние от B до AM, если AB=12, BK=4, MK=3.

№3. Высота цилиндра равна его диаметру AB, AA_1 и BB_1 – образующие. Точка C лежит на окружности с A и B, так, что CA=CB.

а) докажите, что объём пирамиды $CABB_1A_1$ больше объёма куба с ребром, равным радиусу данного цилиндра;

б) найдите площадь полной поверхности данного цилиндра, если его радиус равен $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

№4. В нижнее основание цилиндра вписана трапеция ABCD такая, что основание AD – диаметр цилиндра и AB=BC. Объём цилиндра равен 72π, высота равна 2. Пусть точка M – центр верхнего основания, найдите объём пирамиды MABCD.

№5. Два цилиндра высотой $\sqrt{3}$ касаются боковыми поверхностями внешним образом, их радиусы равны 3 и 4. Плоскость α касается каждой из боковых поверхностей этих цилиндров: большого – по образующей AB, малого – по образующей A_1B_1. Найдите площадь четырёхугольника AA_1B_1B.

Домашнее задание

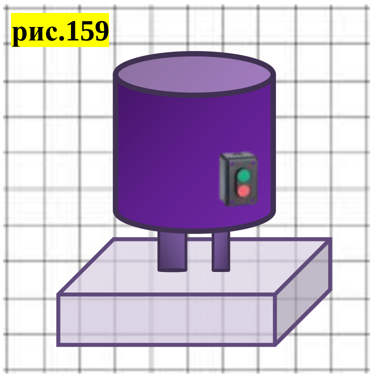


рис.159

1. Система охлаждения на производстве состоит из бака с жидким азотом и ёмкости, в которой происходит реакция. Для стандартного охлаждения используется одна трубка подачи азота, для экстренного – другая, диаметр которой в 1,5 раза больше. Через стандартную трубку жидкий азот перетекает полностью в ёмкость для реакции за 2 минуты, 6 секунд. За сколько секунд ёмкость будет заполнена трубкой экстренного охлаждения?

2. Концы отрезка AB=$4\sqrt{2}$ лежат на разных основаниях цилиндра, прямая AB пересекает ось цилиндра, угол между ними равен 45°. Найдите объём цилиндра, у которого радиус основания в 10 раз больше, а высота в 100 раз меньше.

Тема 34.1 Конус и его свойства. Теоретические основы

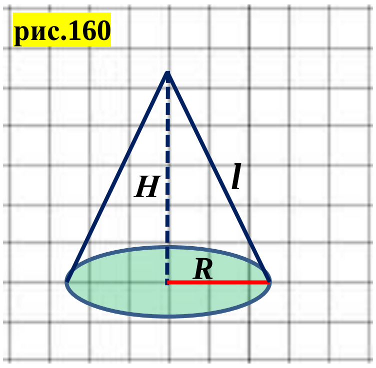


рис.160

Круговой конус – ещё одна распространённая фигура в окружающем нас мире науки и техники (рис.160).

Прямой круговой конус – фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. У конуса есть вершина и основание. Радиус конуса – радиус его основания. Высота конуса – перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания. Если конус прямой, то его вершина проецируется в центр основания, в противном случае конус – наклонный. Образующая конуса – отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой на окружности основания.

Объём конуса, как и у пирамиды, равен произведению трети площади основания на высоту. Учитывая, что в основании лежит круг: $\boldsymbol{V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H}$.

Развёртка боковой поверхности конуса является круговым сектором, радиус которого равен длине образующей, а длина дуги равна длине окружности основания. Таким образом, площадь боковой поверхности: $\boldsymbol{S_{бок} = \pi R l}$.

Площадь полной поверхности складывается из площади круга в основании и площади боковой поверхности. Получаем формулу: $\boldsymbol{S_{пол} = \pi R^2 + \pi R l}$.

№1. Найдите площадь полной поверхности цилиндра с радиусом 4 и высотой 7.

№2. Найдите радиус цилиндра, если площадь его боковой поверхности 36π, а образующая 15.

№3. Найдите радиус конуса, если образующая равна 7, а площадь полной поверхности 18π.

№4. Найдите диаметр конуса, если его образующая равна $\sqrt{17}$, а высота 1.

№5. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его образующая равна 5, а высота 3.

№6. Найдите объём конуса, если его диаметр 8, а высота равна 9.

№7. Объём конуса равен 72π, а его высота равна 6. Найдите диаметр конуса.

№8. Радиус и высота первого конуса 3 и 5, а у второго 2 и 6. Найдите отношение их объёмов.

№9. У первого конуса радиус в 3 раза больше, а высота в 7 раз больше, чем у второго. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго?

Домашнее задание

1. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если его высота 13, а радиус 5.

2. Найдите объём конуса с диаметром 14 и образующей 25.

Тема 34.2 Конус и его свойства. Решение задач

№1. Диаметр кругового конуса равен 12, а его высота равна 8.
а) найдите площадь боковой поверхности конуса;
б) найдите площадь сечения конуса плоскостью, содержащей его диаметр и вершину.

№2. Два конуса имеют общее основание с радиусом 12 и вершины, расположенные по разные стороны от него. Их высоты 5 и 9.
а) найдите площадь поверхности полученной фигуры;
б) найдите площадь сечения фигуры, которая проходит через вершины конусов и диаметр их общего основания.

№3. Диаметр конуса равен $2\sqrt{3}$, его образующая равна 2.
а) найдите угол между образующей и основанием;
б) найдите объём конуса.

№4. Объём конуса равен 6π, а его высота равна 2.
а) найдите угол между высотой конуса и его образующей;
б) найдите площадь полной поверхности конуса.

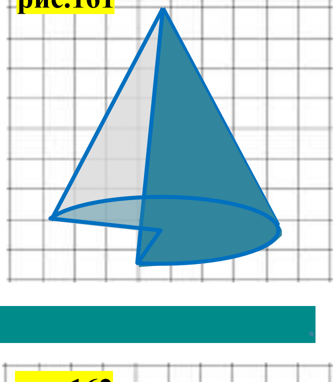
№5. Точки А и В лежат на окружности основания конуса так, что дуга АВ равна 60° . Точка К – вершина конуса, точка О – центр его основания. Известно, что объём конуса равен π, а высота 3.
а) найдите угол между плоскостью (АВК) и плоскостью основания конуса;
б) найдите объём пирамиды КОАВ.

Домашнее задание

1. Деталь устроена так: от конуса с радиусом 3см и образующей 5см отрезали сектор, угол которого равен 90°, как показано на рис. 161.
а) найдите объём данной детали;
б) найдите площадь поверхности.

2. Угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен 45°, длина образующей 12.
а) найдите расстояние от центра основания конуса до образующей;
б) найдите площадь основания конуса.

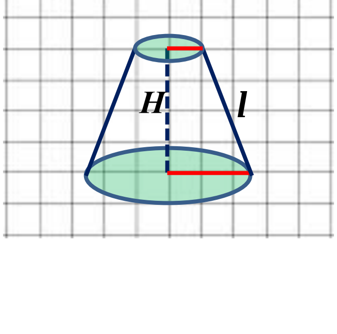
рис.161



Тема 34.3 Усеченный конус и наклонный конус

Сечения конуса весьма разнообразны. Если секущая плоскость проходит параллельно основанию, то сечение – окружность. Если провести сечение через вершину конуса и хорду основания, то получим треугольное сечение. Если сечение перпендикулярно основанию и не проходит через вершину, то получим гиперболу. В случае, если сечение проходит под острым углом к плоскости основания и пересекает само основание, то получим параболу, если не пересекает – эллипс.
По аналогии с усечёнными пирамидами, существует усечённый конус.

рис.162



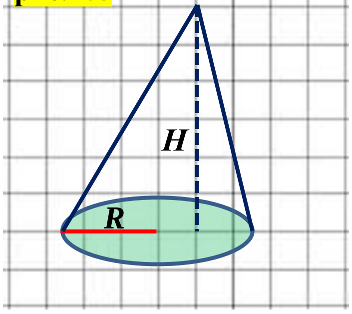
Усечённый конус – тело, полученное вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной её основаниям.

Усечённый конус обладает двумя неравными параллельными основаниями, расстояние между которыми является его высотой. Образующая – отрезок, соединяющий точки двух оснований и полностью лежащий на боковой поверхности. Так же у усечённого конуса принято обозначать и исследовать два радиуса – для малого и большого оснований.

Наклонный конус – это конус, вершина которого не проецируется в центр основания.

Все образующие наклонного конуса имеют разную длину, а для уточнения его формы оговаривается куда именно проецируется вершина. Комбинируя два изученных конуса, можно получить усеченный наклонный конус.

рис.163



№1. Радиусы усечённого конуса равны 5 и 11, образующая 10.

а) найдите высоту усеченного конуса;

б) найти площадь сечения, проходящего через параллельные диаметры двух оснований.

№2. Радиусы оснований усечённого конуса равны $6\sqrt{3}$ и $10\sqrt{3}$, а угол между образующей и плоскостью основания равен 60°. Найдите высоту усеченного конуса.

№3. Радиусы большего и меньшего оснований усеченного конуса равны R и r, а угол между образующей и плоскостью большего основания равен 45°.

а) докажите, что площадь осевого сечения такого конуса равна разности квадратов его радиусов;

б) пусть радиусы оснований равны $\sqrt{8}$ и $\sqrt{2}$, найдите $S_{бок}$.

№4. Вершина К наклонного конуса проецируется в точку А, лежащую на окружности основания. АВ=$6\sqrt{2}$ – диаметр конуса, О – центр основания. Расстояние от точки О до образующей КВ равно 3. Найдите объём конуса.

№5. Вершина К наклонного конуса проецируется в точку Н, лежащую на продолжении диаметра АВ за точку В на расстояние, равное радиусу, ∠КАН=30°.

а) докажите, что образующая КВ – биссектриса ∠АКН;

б) найдите высоту конуса, если его объём равен 3π,

Домашнее задание

1. Радиусы усеченного конуса равны 10 и 5, а его образующая равна 13. Найдите объём конуса.

2. АВ=20 – диаметр наклонного конуса, О – центр основания. Вершина М проецируется в точку К, лежащую на середине отрезка ОВ. Образующая МА=25. Найдите объём конуса.

Тема 34.4 Конус. Решение задач

№1. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Объём цилиндра равен 24, найдите объём конуса.

№2. Бокал для имеет форму конуса, и заполнен жидкостью 30мл, уровень жидкости составляет половину высоты конуса. Сколько жидкости нужно долить, чтобы заполнить бокал до краёв?

№3. Имеются два конуса. У второго из них радиус основания в 4 раза больше, высота в 2 раза меньше. Во сколько раз объём второго конуса больше объёма первого?

№4. В конусе с вершиной S и центром основания О радиус равен 13, высота $2\sqrt{30}$, АВ – хорда основания, М – середина SA, N – такая точка на основании конуса, что MN∥SB.

а) докажите что ∠ANO =∠ANS;

б) найдите длину отрезка MN.

№5. Окружности оснований двух конусов касаются внешним образом в точке К. Радиус первого – 4см, второго – 6см. Высота первого – 3см, второго – 8см. Расстояние между точками М и Р – вершинами первого и второго конуса соответственно равно $5\sqrt{3}$.

а) докажите, что ∠МКР равен 60°;

б) найдите расстояние от точки М до прямой РК.

№6. Конус с вершиной Р имеет радиус 12 и образующую 13. Его поставили на цилиндр такого же радиуса и высотой 11, их основания совпали. Точка М лежит на нижнем основании цилиндра. Найдите угол между прямой РМ и плоскостью основания цилиндра.

Домашнее задание

1. Конус разделили на 4 части осевым сечением и сечением, параллельным основанию и делящим высоту конуса в соотношении 1:4, считая от вершины.

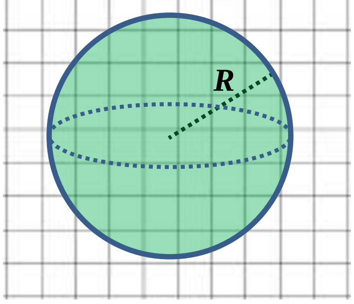
а) докажите, что объём меньшей части составляет менее 1% от объёма всего конуса;

б) найдите объём этой части, если высота конуса равна 24, а радиус основания равен 4.

2. Образующая конуса равна 8, радиус 5. Вершина – К, центр основания – О, АВ – хорда основания. Угол между прямыми АК и ВК равен 60°. Найдите расстояние от точки О до (АВК).

Тема 35.1 Сфера и её свойства. Теоретические основы

рис.164



Особое место среди геометрических фигур занимает сфера (рис.164). Дадим сначала сфере определение, как телу вращения:

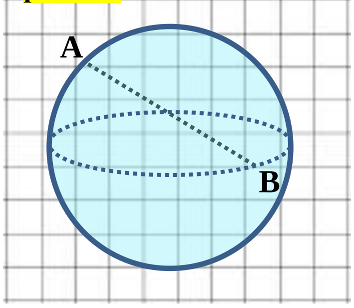
Сфера – это поверхность, полученная вращением окружности вокруг её диаметра.

Сформулируем определение через геометрическое место точек:

Сфера – множество всех точек пространства, равноудалённых от данной точки, называемой центром.

Расстояние от точки на сфере до центра называется радиусом. Хорда – отрезок, соединяющий пару точек на сфере (рис.165). Диаметр – наибольшая хорда. Сечение сферы плоскостью всегда является окружностью. Если сечение проходит через центр, то его называют диаметральным. Площадь такого сечения наибольшая. Разделяют понятия сфера и шар. Сфера – это сама поверхность, а шар – это тело, ограниченное сферой.

рис.165



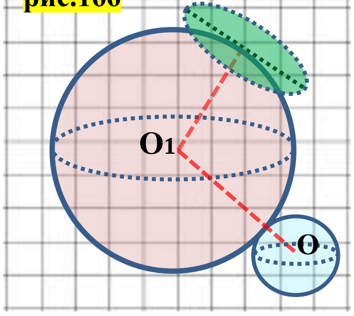
Объём шара вычисляется по формуле: $\boldsymbol{V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

Площадь поверхности сферы: $\boldsymbol{S_c = 4\pi R^2}$.

Плоскость является касательной к сфере, если данная плоскость имеет с ней только одну общую точку.

Радиус, проведённый в точку касания, всегда перпендикулярен касательной плоскости.

рис.166



Заметим, что и любая прямая этой плоскости, проходящая через точку касания, будет перпендикулярна радиусу. Две сферы называют касающимися, если они имеют одну общую точку. Касаться сферы могут как внешним, так и внутренним образом. Как и у окружностей:

Точка касания сфер и их центры лежат на одной прямой.

№1. Найдите площадь сферы, если её диаметр равен 22.

№2. Найдите площадь сферы, если в её диаметральное сечение вписан квадрат со стороной 4.

№3. Найдите площадь квадрата, вписанного в диаметральное сечение сферы, если площадь поверхности сферы равна 36π.

№4. Площадь поверхности первой сферы равна 40, у второй сферы радиус в 2,5 раза больше. Найдите площадь второй сферы.

№5. Площадь поверхности планеты Земля примерно равна 509645864 км. кв, как сказано в одном из источников. Какой средний радиус нашей планеты взяли для расчёта авторы текста? Полагайте, что $\pi \approx 3{,}14$.

№6. Найдите объём шара с радиусом 5см.

№7. Объём шара равен 972π. Найдите диаметр шара.

№8. Объём первого шара равен 2. У второго шара радиус в 3 раза больше. Найдите его объём.

№9. Даны сферы с радиусами 3 и 4.

а) докажите, что объём большей сферы более чем в 2 раза превышает объём меньшей сферы;

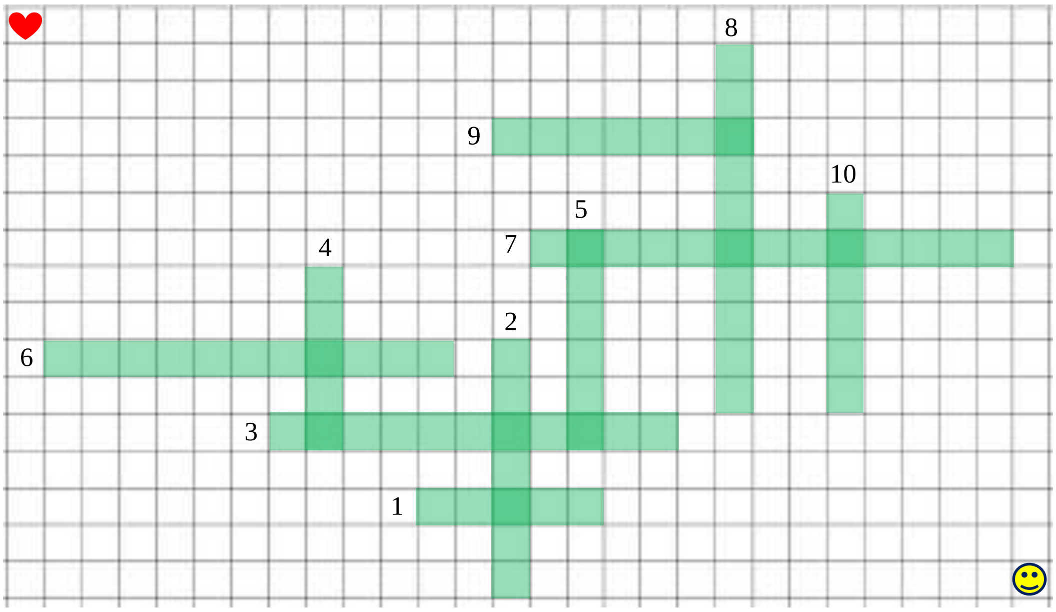
б) найдите разницу площадей поверхностей этих сфер.

Домашнее задание

1. Найдите отношение объёмов сфер, если их радиусы 4 и 6.

2. Площадь сферы равна 196π. Найдите объём этой сферы.

3. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь, вопросы переписывать не нужно.



1. Фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов.
2. Фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.
3. Прямая, которая имеет с окружностью одну общую точку.
4. Отрезок, соединяющий две точки окружности.
5. Угол, соответствующий дуге, длина которой равна её радиусу.
6. Множество всех точек, равноудалённых от сторон угла.
7. Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной основанию.
8. Отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой на окружности его основания.
9. Наибольшая из всех хорд окружности.
10. Сечение конуса, проходящее через все его образующие.

Тема 35.2 Сфера и её свойства. Решение задач

№1. Три сферы с радиусами 3, 2, 1 попарно касаются внешним образом, их центры A, B, C.
а) докажите, что треугольник ABC – прямоугольный;
б) найдите радиус сферы, объём которой равен суммарному объёму трёх этих сфер.

№2. Сфера расположена внутри цилиндра, касается его оснований и боковой поверхности.
а) докажите, что площадь поверхности сферы и цилиндра относятся друг к другу, как 2:3;
б) найдите площадь поверхности сферы, если площадь поверхности цилиндра равна 48.

№3. Основание конуса совпадает с диаметральным сечением сферы, а его вершина лежит на сфере и проецируется в её центр.
а) докажите, что объёмы конуса и сферы относятся как 1:4;
б) найдите образующую конуса, если радиус сферы $R = \sqrt{8}$.

№4. Радиус сферы равен 41, сечение сферы удалено от её центра на расстояние 9. Квадрат вписан в окружность данного сечения. Найдите площадь этого квадрата.

№5. Вершины треугольника ABC лежат на сфере, AB=6, BC=8, AC=10. Радиус этой сферы равен 13. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости (ABC).

№6. Плоскость касается сферы радиуса 12 в точке К, точка М лежит в этой плоскости так, что КМ = 9, точка Р лежит на сфере и является ближайшей точкой сферы для точки М. Докажите, что расстояние от точки М до точки Р равно 3;

Домашнее задание

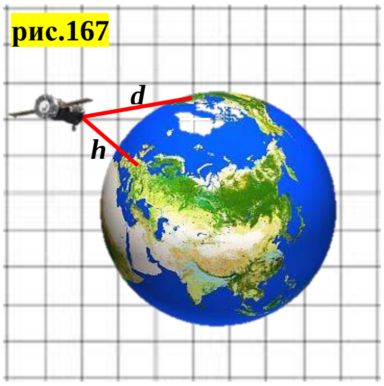
1. Диаметральное сечение сферы вписано в правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, точка М лежит на сфере и проецируется в точку О – центр треугольника ABC.
а) докажите, что МО = 1;
б) найдите боковое ребро пирамиды МABC.

2. Площадь диаметрального сечения равна 16π. Найдите площадь сечения, параллельного ему и проходящего черес середину радиуса сферы.

Тема 35.3 Сфера и её свойства. Решение задач

№1. Дальность видимого горизонта d – расстояние до наиболее удалённой точки, доступной наблюдателю, который находится на высоте h над уровнем моря. Выведите формулу, по которой можно вычислить искомое расстояние d, полагая радиус Земли равным R. Попробуйте оценить дальность видимого горизонта для человека, стоящего на берегу моря. Как преобразуется полученная формула, если пренебречь малым h относительно радиуса Земли; Вычислите d для спутника, пролетающего над Землёй на высоте 500км.

рис.167



№2. В диаметральное сечение сферы вписан квадрат. В данный квадрат вписано диаметральное сечение второй сферы.

а) докажите, что отношение площадей поверхности этих сфер составляет 1:2;

б) найдите объём большей сферы при стороне квадрата $\sqrt{18}$.

№3. О – центр сферы, К – середина радиуса сферы. Плоскость проходит перпендикулярно радиусу через точку К и пересекает сферу по окружности ω, точка М лежит на ω.

а) докажите, что угол между прямыми КМ и ОМ равен 30°;

б) найдите объём конуса с основанием ω и вершиной О, если радиус сферы равен 6.

№4. Вершины прямоугольника ABCD с диагональю 16 лежат на сфере с центром О и радиусом 10. Точка М лежит на сфере так, что прямая МО перпендикулярна плоскости прямоугольника. Найдите большее из возможных расстояний от точки М до плоскости (ABC).

№5. Все стороны треугольника ABC касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если AB=13, BC=14, CA=15.

№6. Две сферы радиусами 24 и 6 касаются внешним образом, плоскость касается обеих сфер сразу в точках К и М. Докажите, что отрезок КМ равен радиусу большей сферы.

Домашнее задание

1. Диаметр сферы AB=50. Плоскость сечения β содержит точку В и его радиус равен 20. Плоскость сечения γ перпендикулярна ей и имеет такой же радиус. Найдите длину отрезка, по которому пересекаются эти сечения.

2. Два шара имеют общий центр и радиусы, которые относятся друг к другу, как 2:3. Из большего шара удаляют меньший, получив шар с пустотой внутри. Докажите, что объём такой фигуры составляет не менее 77% от объёма исходного большого шара.

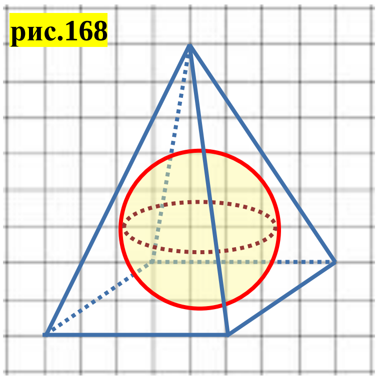
Тема 36.1 Вписанные тела вращения. Вписанная сфера

Внутрь некоторых фигур можно вписать тела вращения.

Сфера называется вписанной в многогранник, если она касается всех его граней.

Сферу возможно вписать в призму, если её диаметр равен высоте призмы, и её диаметральное сечение можно вписать в основание призмы. Сферу можно вписать в любую треугольную пирамиду, а также в любую правильную пирамиду и конус.

рис.168

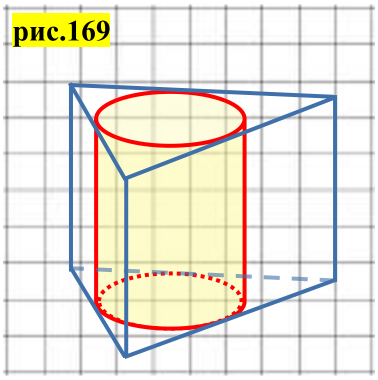


Цилиндр и конус тоже можно вписывать в различные тела.

Конус называют вписанным в пирамиду, если их вершины совпадают, а основание конуса вписано в основание пирамиды.

Цилиндр называют вписанным в призму, если его основания вписаны в основания призмы и их высоты совпадают.

рис.169



Так же тела вращения можно вписывать друг в друга. Условия, при которых это возможно, выясним на практике.

№1. Сфера с радиусом r вписана в параллелепипед.

а) докажите, что площадь поверхности параллелепипеда равна $24r^2$;

б) найдите диагональ параллелепипеда, если $r = \sqrt{12}$;

№2. ABM и ABP – два правильных треугольника со стороной 6, угол между плоскостями (ABM) и (ABP) равен 60°. Найдите радиус сферы, касающейся двух этих треугольников в их ортоцентрах.

№3. Сфера с центром O вписана в правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с ребром основания a.

а) докажите, что высота призмы равна $\frac{a}{\sqrt{3}}$;

б) найдите угол между прямой AO и плоскостью (ABC).

№4. Сфера вписана в конус.

а) докажите, что расстояние от центра сферы до любой образующей равно расстоянию от центра сферы до плоскости основания конуса;

б) найдите расстояние от центра сферы до образующей конуса, если диаметр основания равен 8, образующие равны 5.

№5. Сфера вписана в правильный тетраэдр.

а) докажите, что радиус этой сферы составляет четвёртую часть от высоты тетраэдра;

б) найдите объём сферы, если ребро тетраэдра равно $\sqrt{6}$.

№6. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания равным 2 и боковым ребром равным $\sqrt{5}$.

Домашнее задание

1. Ребро основания правильной четырёхугольной пирамиды равно 6, боковая грань наклонена к основанию под углом 60°. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

2. В усечённый конус с радиусами оснований 9 и 4 вписали сферу, найдите её радиус.

Тема 36.2 Вписанные тела вращения. Вписанный цилиндр и конус

№1. В правильную шестиугольную призму с ребром основания $\sqrt{3}$ вписан цилиндр. Найдите объём этой призмы.

№2. В правильную четырёхугольную пирамиду, все рёбра которой равны a, вписан конус. Докажите, что высота такого конуса в $\sqrt{2}$ раз больше его радиуса.

№3. Цилиндр вписан в куб. Докажите, что отношение объёма цилиндра и куба равно $\pi : 4$.

№4. Усечённый конус с радиусами 1 и 2 и высотой $\sqrt{8}$ вписан в усечённую правильную четырёхугольную пирамину. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

№5. $ABCA_1B_1C_1$ – наклонная призма с боковым ребром 10, в основании лежит треугольник ABC, AB=BC=17, AC=16. Точка B_1 проецируется в точку H на ребре AB, так, что BH=8. В призму вписан наклонный цилиндр. Найдите объём цилиндра.

№6. В основании призмы треугольник со сторонами 8, 10, 12. Объём вписанного цилиндра 28π. Найдите высоту призмы.

Домашнее задание

1. Конус вписан в правильную треугольную пирамиду с ребром основания 6 и боковым ребром $4\sqrt{3}$. Найдите объём конуса.

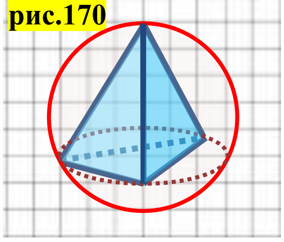
2. Найдите объём цилиндра, вписанного в правильную треугольную призму с ребром основания $12\sqrt{3}$ и высотой 5.

Тема 37.1 Описанные тела вращения. Теоретические основы

Около некоторых тел можно описать тела вращения. При каких условиях это возможно?

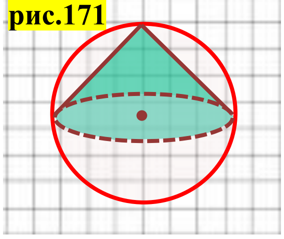
Сфера называется описанной около многогранника, если все его вершины лежат на сфере.

рис.170



Около призмы и пирамиды можно описать сферу, если около их основания можно описать окружность (рис.170). Около любой треугольной призмы и любой треугольной пирамиды можно описать сферу. Попробуйте доказать этот факт. Сферу можно описать около конуса и цилиндра.

рис.171



Сфера называется описанной около конуса, если основание конуса совпадает с сечением сферы, и его вершина лежит на сфере.

Сфера называется описанной около цилиндра, если его основания - два равных параллельных сечения данной сферы.

№1. Дан куб.
а) докажите, что отношение радиусов описанной и вписанной сферы для него будет равно $\sqrt{3}$;
б) найдите радиус окружности, вписанной в грань куба, если радиус сферы, описанной около куба равен $3\sqrt{3}$.

№2. Рёбра основания прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ AB=1, AC=6, BC=$\sqrt{35}$. Высота равна 6, AC_1 и CA_1 пресекаются в точке O.
а) докажите, что O – центр сферы, описанной около данной призмы;
б) найдите объём пирамиды OABC.

№3. Около правильной четырёхугольной пирамиды MABCD описана сфера так, что основание пирамиды вписано в диаметральное сечение сферы. Докажите, что AM ⊥ MC.

№4. Около цилиндра высотой H и диаметром D описана сфера радиуса R.
а) докажите, что $R = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + H^2}$;
б) найдите отношение объёмов цилиндра и сферы, если высота цилиндра равна его диаметру.

№5. Радиус основания конуса равен 9, высота равна 12. Плоскость α содержит хорду основания AB=10 и вершину конуса K, точка H – центр основания конуса.
а) докажите, что центр описанной около конуса сферы делит высоту конуса в соотношении 7:25;
б) найти расстояние от точки H до плоскости α.

№6. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром a.

Домашнее задание

1. Цилиндр описан около правильной шестиугольной призмы. Найдите отношение объёмов цилиндра и призмы с точностью 0,1.

2. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной призмы с ребром основания 3 и высотой $\sqrt{88}$.

Тема 37.2 Описанные тела вращения. Решение задач

№1. Дана правильная шестиугольная призма, в которую можно вписать сферу. Около призмы описан цилиндр радиуса R. Докажите, что площадь боковой поверхности призмы равна $6\sqrt{3} \cdot R^2$.

№2. В прямоугольном параллелепипеде рёбра основания равны 5 и 12, а его диагональ образует с боковым ребром угол 45°. Найдите радиус сферы, описанной около параллелепипеда.

№3. Основание конуса вписано в сферу и удалено от её центра на расстояние, равное половине радиуса сферы. Вершина конуса лежит в центре сферы. Найдите отношение их объёмов.

№4. Пирамида SABC вписана в конус так, что AB – его диаметр, BC=7, AC=$\sqrt{95}$, SC=10. Найдите высоту конуса.

№5. Пирамида SABC вписана в цилиндр так, что AB – его диаметр, O – середина AB, SC=16 – образующая цилиндра, OS=20, AC=$\sqrt{53}$. Найдите расстояние от точки B до плоскости SAC.

№6. В основании призмы треугольник ABC, AB=$\sqrt{98}$, $\angle A = 37°$, $\angle B = 98°$, объём описанного около призмы цилиндра равен 98π. Найдите высоту этого цилиндра.

Домашнее задание

1. Цилиндр описан около призмы, в основании которой треугольник со сторонами 40, 40, 48. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если высота призмы 10.

2. Около усеченного конуса с радиусами оснований 1 и 2 и высотой 3 описали сферу. Найдите её радиус.

Тема 37.3 Вписанные и описанные тела вращения. Обобщение

№1. Сфера с центром O касается в точках A и B двух плоскостей, пересекающихся под углом 60°, при этом хорда AB=$\sqrt{12}$. Найдите площадь поверхности сферы.

№2. Цилиндр описан около правильной четырёхугольной призмы с ребром основания 8 и боковым ребром 7. Найдите объём цилиндра.

№3. Найдите радиус сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду с ребром основания 36 и боковым ребром 30.

№4. Прямой конус вписан в сферу, радиус которой равен 5. Расстояние от цетра сферы до основания конуса равно 3. Найдите все возможные объёмы этого конуса.

№5. Цилиндр вписан в сферу так, что его основания пересекают середины двух радиусов сферы. Найдите отношение объёма цилиндра к объёму сферы.

№6. Цилиндр описан около правильной шестиугольной призмы, у которой ребро основания 6, а объём равен 162. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

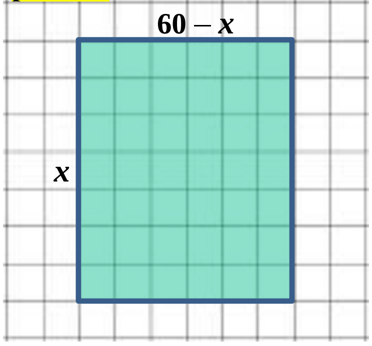
Домашнее задание

1. Сфера касается правильного треугольника со стороной $\sqrt{12}$ в его центре. Расстояние от вершины треугольника до центра сферы равно $\sqrt{37}$. Найдите площадь сферы.

2. Около правильной шестиугольной пирамиды с ребром основания 2 и боковым ребром 4 описана сфера. Найдите площадь поверхности этой сферы.

Тема 38.1 Применение производной в геометрии

рис.172



В математике есть так называемые задачи на оптимизацию. Часто актуален вопрос наибольшего и наименьшего значения некоторой величины – расстояния, площади, объёма. Для решения таких задач требуется применить производную. Рассмотрим пример.

Фермер купил 120м забора, которым надо оградить участок прямоугольной формы. Большая площадь участка принесёт больший урожай. Какой должна быть его длина и ширина, чтобы площадь была максимальной? Какова максимальная площадь?

Первый этап решения – введение переменной величины. Пусть x – длина участка. Периметр равен 120, ширина: $(120 - 2x): 2 = 60 - x$. Естественно, что будут ограничения: $0 < x < 60$.

Второй этап – составление функции. Площадь участка – произведение длины и ширины: $S(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$.

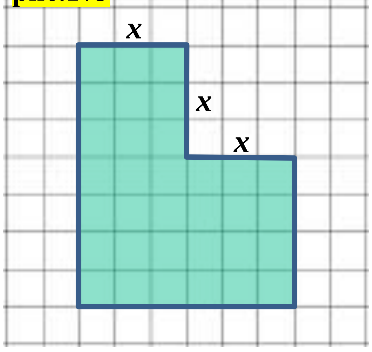
Третий этап – исследование функции. Найдем с помощью производной точку экстремума: $S'(x) = 60 - 2x,\ \ 60 - 2x = 0,\ \ x = 30$. Заметим, что при $x < 30$ производная положительна, а при $x > 30$ – отрицательна. Значит, 30 – точка максимума, и она единственная на промежутке, в ней будет достигаться наибольшее значение: $S(30) = 60 \cdot 30 - 30^2 = 900$.

Четвёртый этап – подведение итогов. Участок будет иметь наибольшую площадь, если длина и ширина будут 30м, наибольшая возможная площадь составит 900м^2.

№1. Прямоугольник ABCD устроен так, что вершина A лежит в начале системы координат, Вершина B лежит на оси *Oy*, а вершина D лежит на оси *Ox*. Вершина C может располагаться на любой точке параболы $y = 9 - x^2$ (рассматривается только 1 четверть системы координат). Какую наибольшую площадь может иметь такой прямоугольник?

№2. Прямоугольная трапеция ABCD с основаниями AB и CD устроена так, что вершина A(4;0), вершина B(4;2), вершина C лежит на графике функции $y = \sqrt{x}$, вершина D лежит на оси *Ox*. Какую наибольшую площадь может иметь такая трапеция?

рис.173



№3. План строительства склада изображён на рисунке 173. Постройка стен – наиболее затратная часть. Имеется 800тыс. руб. Цена за 1 метр возведённой стены – 20тыс.руб. Важным условием является форма склада, содержащая три равных стены, как показано на плане. Какую наибольшую площадь может иметь склад при всех указанных условиях?

№4. Имеется остаток ткани в виде прямоугольного треугольника с катетами 3м и 4м. Портниха должна вырезать из него скатерть прямоугольной формы так, чтобы её площадь была наибольшей. Каким образом это сделать?

Домашнее задание

1. Остроугольный треугольник ABC задан точками A(2;0), B(6;0), а C лежит на графике функции: $f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$. Найдите наибольшую возможную площадь треугольника.

2. Из полукруга радиуса 10 вырезать треугольник наибольшей площади, если одна из его сторон совпадает с диаметром этой окружности.

Тема 38.2 Применение производной в геометрии. Решение задач

№1. Имеется лист металла в форме прямоугольной трапеции с основаниями 30см и 90см и большей боковой стороной 1м. По заданию необходимо вырезать из него прямоугольный лист наибольшей площади. Какую наибольшую площадь можно получить?

№2. Компания имеет прямоугольный участок, от которого для посадки деревьев планируется отделить часть площадью 16км², «срезав» его угол. Необходимо возвести ограждение. С южной стороны участка песчаная почва, и строительство обходится в 6,4 тыс.$. за км, с восточной стороны почва благоприятнее, и строительство обходится в 5 тыс.$. за км. Найти наименьшие возможные затраты на строительство.

рис.174

№3. Как создать каркасную правильную четырёхугольную призму наибольшего объёма из проволоки длиной 36см?

№4. Жестяная консервная банка имеет форму цилиндра радиуса R и высоты H. Площадь листа жести на одну банку равна 96π см^2. Объём банки может быть разным. Производителю выгодно, чтоб объём был наибольшим. Найдите R и H, для которых её объём будет максимальным (выразите H через площадь и через объём, получив зависимость объёма от R).

Домашнее задание

1. Сосуд для химических экспериментов отливают из стекла в форме правильной треугольной призмы без крышки, объём которой должен составлять ровно 1л. Как должны относиться высота призмы и сторона основания, чтобы расходы стекла были наименьшими?

Тема 38.3 Применение производной в геометрии. Решение задач

№1. Конус имеет радиус 4 и высоту 8. Какой радиус должен быть у вписанного в него цилиндра, чтобы объём этого цилиндра был наибольшим? Получите функцию, которая показывает зависимость объёма цилиндра от его радиуса, (выразите высоту цилиндра через его радиус, рассмотрите подобные прямоугольные треугольники и составьте пропорцию по сторонам).

№2. Цилиндр вписан в сферу с радиусом 3. Какой радиус должен быть у цилиндра, чтобы его объём был наибольшим?

№3. Из цилиндрического бруса длиной 4м и радиусом 20см необходимо вырезать брус в форме прямоугольной призмы так, чтобы отходов было как можно меньше. Как это сделать?

№4. Конус вписан в шар радиуса 15. Какой высоты h должен быть конус с радиусом r, чтобы его объём был максимальным? (воспользуйтесь тем, что в окружности произведения отрезков пересекающихся хорд равны, так можно выразить радиус конуса через высоту и радиус сферы).

№5. Два дома расположены – один на расстоянии 400м, другой – на расстоянии 200м от прямой дороги, между домами – 600м. В каком месте у дороги построить магазин, чтобы сумма расстояний от двух домов до магазина была минимальна?

Домашнее задание

1. ABCD – равнобедренная трапеция. Точку E лежит на большем основании AD так, что BE∥CD. Периметр треугольника ABE равен 40, периметр трапеции ABCD равен 50. Найдите наибольшую возможную площадь трапеции, если её острый угол равен 30°.

2. На левом берегу в 2 км от реки находится посёлок A. На правом берегу в 5 километрах ниже по течению находится посёлок B, от него до берега 1км. Мост через реку надо построить в таком месте, чтобы путь из A в B был кратчайшим. Дороги от посёлков до моста будут идти по прямой. Где строить мост?

Тема 39.1 Подведение итогов главы. Решение задач

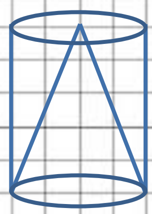
№1. Свадебный торт состоит из двух ярусов в форме цилиндров с радиусами 30см и 20см. Высота каждого яруса 15см. Средняя плотность торта равна 0,4г/см^3. Считая, что $\pi \approx 3{,}14$, вычислите массу торта и его стоимость, если в прайсе указано, что цена за 1кг равна 1500 руб. Украшения в виде ягод и т.п. не учитываются в общей массе и не влияют на стоимость изделия (рис.175).

рис.175

№2. Найдите отношение объёмов двух цилиндров – вписанного в правильную треугольную призму и описанного около неё.

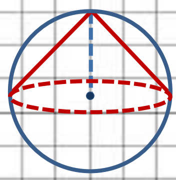
№3. Решите задачи по готовому чертежу.

рис.176



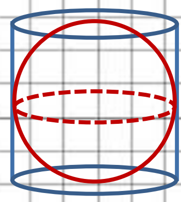
Объём конуса равен 14, объём цилиндра-?

рис.177



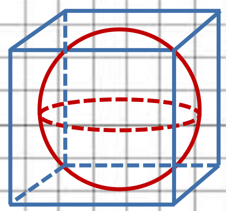
Объём конуса равен 18, объём шара-?

рис.178



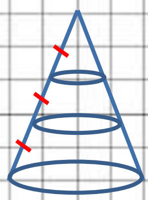
Объём цилиндра равен 27, объём шара-?

рис.179



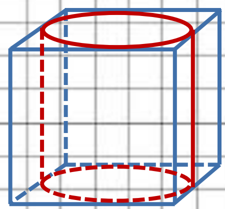
Объём шара равен 288π, объём куба-?

рис.180



Объём всего конуса 108, объём средней части-?

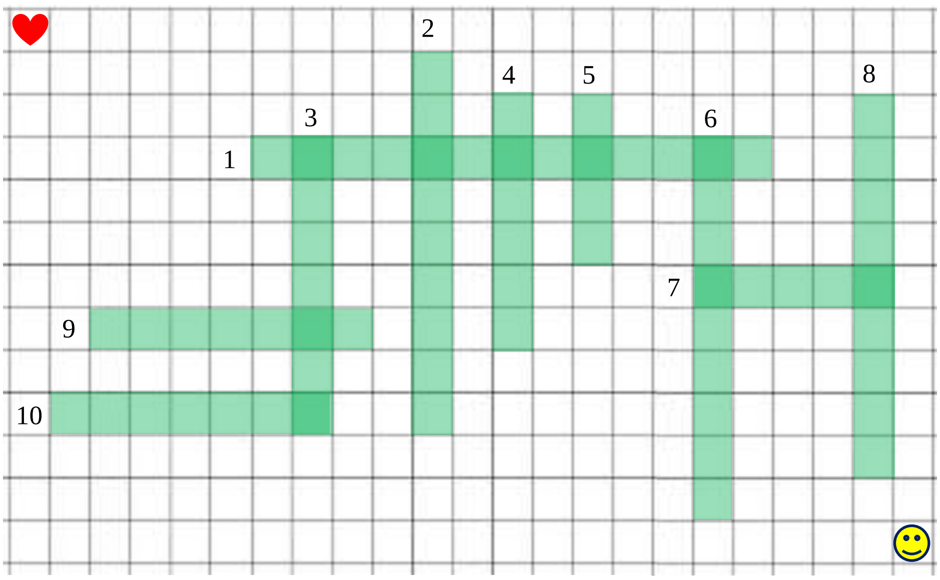
рис.181



Объём куба равен 64, объём цилиндра-?

Домашнее задание

1. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь, вопросы переписывать не нужно.



1. Сечение сферы плоскостью, проходящей через её центр.
2. Конус, полученный вращением прямоугольной трапеции вокруг её меньшей боковой стороны.
3. Точка пересечения биссектрис треугольника.
4. Угол между касательной плоскостью к сфере и радиусом, проведенным в точку касания.
5. Тело, ограниченное поверхностью сферы и парой параллельных секущих плоскостей, называется шаровой (…).
6. Цилиндр, боковая поверхность которого целиком содержит все рёбра некоторой призмы.
7. Множество точек пространства, равноудалённых от одной точки.
8. Сфера, которая касается всех граней многогранника.
9. Тело, ограниченное поверхностью сферы и секущей плоскостью, называется шаровой (…).
10. Окружность на Земном шаре – граница диаметрального сечения.

2. Первый сосуд цилиндрической формы имеет радиус основания 6 и высоту 3, он полностью заполнен водой. Второй имеет радиус основания 4. В него перелили всю воду, и он оказался заполнен на 75%. Найдите высоту второго цилиндра.

Тема 39.2 Подведение итогов главы. Решение задач

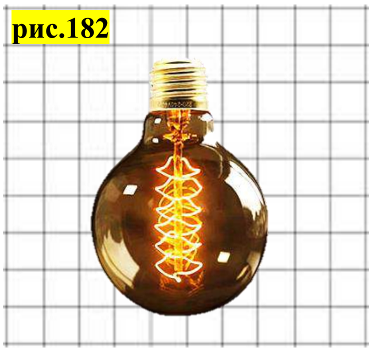


рис.182

№1. Декоративная лампочка по форме близка к сфере с радиусом 5см. Стоимость лампочки складывается из стоимости цоколя, нити накаливания и стеклянной колбы. Последняя зависит от количества использованного стекла, цена которого 1,5руб/см^2. Найти стоимость лампочки, если суммарная стоимость цоколя и нити накаливания равна 29руб. ($\pi \approx 3{,}14$)

№2. Два сечения конуса параллельны основанию. Первое проходит через середину высоты, а второе делит высоту в соотношении 1:2, считая от вершины. Какую часть объёма конуса составляет фигура, заключенная между этими плоскостями?

№3. В правильную четырёхугольную пирамиду вписан конус с радиусом основания 10, и образующей 24. Найдите угол между боковым ребром пирамиды и её основанием.

№4. Каждая из двух касающихся сфер касаются оснований четырёхугольной призмы и касаются её боковых граней. Найдите радиус сфер, если объём призмы равен 16.

№5. Диаметр конуса равен его образующей. Через середину высоты конуса проведено сечение, параллельное основанию, которое совпадает с верхним основанием цилиндра, а нижнее основание цилиндра лежит на основании конуса. Найдите отношение объёмов цилиндра и конуса.

Домашнее задание

1. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания $4\sqrt{5}$ и боковым ребром 7. Сфера радиуса 8 касается основания пирамиды и продолжений всех боковых граней. К – точка касания с продолжением грани MCD. Найдите длину отрезка MK.

2. Плоскость квадрата ABCD со стороной 3 касается сферы с центром О в точке А, площадь сферы равна 64π.

а) докажите, что (ABC) ⊥ (OAB);

б) найдите объём пирамиды OABCD.

Тема 39.3 Подведение итогов главы. Решение задач

рис.183

№1. Когда комнатное растение вырастает, его надо пересаживать в горшок большего размера. Горшок имеет форму усеченного конуса с радиусами 10см и 5см и высотой 30см. Следующий горшок должен иметь объём на 20% больше. В магазине горшки продаются с объёмами равными целому числу литров. Сколько литров в наиболее подходящем горшке? ($\pi \approx 3{,}14$)

№2. Около правильной четырёхугольной пирамиды описана сфера, площадь которой 100π. Найти объём пирамиды, если её боковое ребро $5\sqrt{3}$, а центр сферы расположен на её высоте.

№3. Вершина конуса S, AB – диаметр, точка С лежит на окружности основания, О – его центр, точка М – середина АС.

а) докажите, что SM и AC перпендикулярны;

б) найдите расстояние от точки О до плоскости ASC, если SO=12, AB=20, ∠BAC=30°.

№4. В цилиндре AB – диаметр, BB_1 – образующая, прямая AB_1 пересекает ось цилиндра в точке О. Точка С лежит на окружности основания с диаметром АВ, причём АО=АС.

а) докажите, что $\angle AB_1C=30°$.

б) найдите объём цилиндра, если BC=4, $B_1C=12$.

Домашнее задание

1. Около правильной шестиугольной пирамиды с ребром основания 4 и боковым ребром 8 описана сфера. Найдите площадь поверхности этой сферы.

2. AB – образующая цилиндра. Основание конуса с вершиной К, высотой 3 и радиусом $\sqrt{3}$ лежит в той же плоскости, что и основание цилиндра. Конус касается цилиндра в точке А. Оказалось, что точка К равноудалена от точек А и В. Радиус цилиндра равен 4, а его объём равен 96π. Найдите угол между прямыми АК и ВК.

Тема 40.1 Векторы на плоскости и их приложения. Теоретические основы

Вектор – это направленный отрезок. Из курса основной школы вы уже знаете, как выглядят векторы. Так же вы использовали это понятие при работе с задачами в физике. На сегодняшний день векторы используются так же в информатике. В этой главе мы ещё познакомимся с векторами в пространстве, научимся решать задачи векторно-координатным методом.

В системе координат выберем две точки: $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}; y_{\mathrm{A}})$ и $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}; y_{\mathrm{B}})$. Определим, что А – начало вектора, В – его конец. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \{\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}};\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{y}_{\mathrm{A}}\} = \{\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}\}$**.**

Вектор характеризуется его длиной $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$. Это фундаментальная характеристика позволит нам решать множество задач. Рассмотрим пример. Даны точки $\mathrm{A}(-3; 4)$ и $\mathrm{B}(7; 28)$.

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \{7 - (-3);\ 28 - 4\} = \{10; 24\}$.

Найдём длину вектора $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$.

Вектор можно умножить на число, что удлиняет его в это число раз. На координатах вектора это отражается так: $k \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \{\boldsymbol{kx}; \boldsymbol{ky}\}$**.** При этом вектор не меняет угол наклона. А значит, векторы $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $k \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ остаются параллельными. Получаем признак параллельности векторов.

Векторы параллельны, если их координаты пропорциональны.

Векторы можно складывать и вычитать. Для этого надо сложить или вычесть их соответствующие координаты $\{\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\} \pm \{\boldsymbol{c}; \boldsymbol{d}\} = \{\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{c};\ \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{d}\}$**.**

Так же существует понятие скалярного произведения векторов. По определению, это произведение длин векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат. $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{y}_{\mathrm{A}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}$.

Можно вычислить косинус угла между векторами $\boldsymbol{cos}\angle(\vec{\boldsymbol{a}};\ \vec{\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{b}}|}$**.** А зная косинус, можно получить и величину самого угла. Заметим, что для прямого угла косинус равен 0. Но дробь может быть равна 0, только если в её числителе 0. Получаем признак перпендикулярности векторов.

Векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно 0.

№1. Решите задачи о длине вектора:

а) Даны векторы: $\vec{a} = \{1; 2\}, \vec{b} = \{-3; 6\}, \vec{c} = \{4; -2\}$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

б) Даны векторы: $\vec{a} = \{2; -1\}, \vec{b} = \{-6; 2\}, \vec{c} = \{-7; -3\}$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

в) Даны векторы $\vec{a} = \{8; 4\},\ \vec{b} = \{3; 9\}$. Найти длину вектора $0{,}25\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$**.**

г) Даны векторы $\vec{a} = \{5; -15\},\ \vec{b} = \{7; 10{,}5\}$. Найти длину вектора $0{,}2\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$

№2. Решите задачи о скалярном произведении:

а) Даны векторы: $\vec{a} = \{-4; 1\}, \vec{b} = \{-3; 0\}, \vec{c} = \{3; m\}$. Найдите m, если $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

б) Даны векторы: $\vec{a} = \{5; 2\}, \vec{b} = \{-3; 6\}, \vec{c} = \{4; m\}$. Найдите m, если $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

в) Даны векторы: $\vec{a} = \{8; p\},\ \vec{b} = \{-3; 2\}$. Найдите p, если векторы перпендикулярны.

г) Даны векторы: $\vec{a} = \{8; q\}, \vec{b} = \{-6; 2\}$. Найдите $|\vec{a}|$, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = -36$.

№3. Решите задачи об углах между векторами.

а) Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \{3; 4\}, \vec{b} = \{4; 3\}$

б) Найдите угол между векторами $\vec{a} = \{1; \sqrt{3}\}, \vec{b} = \{7; 0\}$

в) Даны векторы: $\vec{a} = \{8; p\},\ \vec{b} = \{-2; 6\}$. Найдите p, если векторы параллельны.

г) Даны параллельные векторы: $\vec{a} = \{3; m\}, \vec{b} = \{-6; 2\}$. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Домашнее задание

1. Даны точки М(3; 5) и К(4; 11) Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$**.**

2. Даны векторы: $\vec{a} = \{3; -2\}, \vec{b} = \{-1; 2\}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{2a} + \vec{b}$.

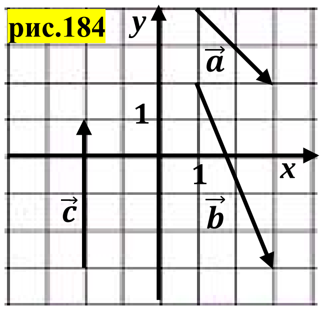
3. Докажите, что векторы: $\vec{a} = \{7; -2\}, \vec{b} = \{12; 42\}$ перпендикулярны.

4. Докажите, что векторы: $\vec{a} = \{18; -6\}, \vec{b} = \{12; -4\}$ параллельны.

5. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \{3; -4\}, \vec{b} = \{5; 0\}$.

Тема 40.2 Векторы на плоскости и их приложения. Решение задач

№1. На рисунке 184 изображены три вектора. Выполните задания:



а) найдите координаты всех векторов;

б) найдите координаты вектора $3\vec{a}+\vec{b}-0{,}75\vec{b}$;

в) вычислите $(\vec{a}+\overrightarrow{2b})\cdot\vec{c}$;

г) найдите длину вектора $\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}$

№2. Даны точки A(−6; 1), B(0; 9), C(4; 1).

а) докажите, что треугольник ABC равнобедренный;

б) найдите площадь треугольника ABC.

№3. Даны точки A(−5; 3), B(1; 6), C(2; 3).

а) докажите, что треугольник ABC прямоугольный;

б) найдите площадь треугольника ABC.

№4. Даны точки A(0; 0), B(1; 3), C(−5; 5), D(−3; 1).

а) докажите, что четырёхугольник ABCD – трапеция;

б) найдите площадь трапеции ABCD.

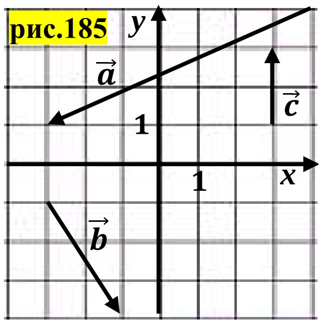
№5. Даны точки A(0; 1), B(3; 4), C(1; 6), D(−2; 3).

а) докажите, что четырёхугольник ABCD – прямоугольник;

б) найдите площадь прямоугольника ABCD.

Домашнее задание

1. На рисунке 185 изображены три вектора. Выполните задания:



а) найдите координаты всех векторов;

б) найдите координаты вектора $\vec{a}-2\vec{b}-1{,}5\vec{b}$;

в) вычислите $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$;

г) найдите длину вектора $\overrightarrow{2c}+\vec{b}+\vec{a}$.

2. Даны точки A(−3; −1), B(−1; 3), C(3; 1).

а) запишите уравнения прямых AB, BC, CA;

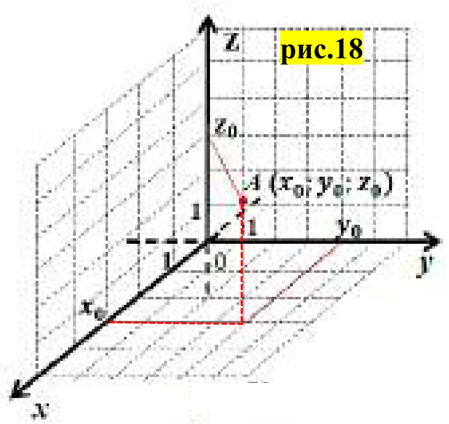
б) докажите, что треугольник ABC – равнобедренный;

в) найдите ∠ACB;

г) найдите длину медианы AM;

Тема 41.1 Координаты точки и вектора в пространстве

Прямоугольная система координат в пространстве – тройка взаимно перпендикулярных числовых осей *x*, *y*, *z* с общим началом O, заданными направлениями и определённым масштабом. У каждой точки 3 координаты: абсцисса – *x*, ордината – *y*, аппликата – *z*.



Пара точек пространства $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ задаёт координаты концов отрезка. Координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат его концов.

$$C\left(\frac{x_A+x_B}{2};\ \frac{y_A+y_B}{2};\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Вектор в пространстве – направленный отрезок.

Некоторые операции с векторами в пространстве схожи с операциями на плоскости.

Координаты вектора вычисляются как и на плоскости: $\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A\}$.

Длина вектора $\overrightarrow{AB}=\{x_0;\ y_0;\ z_0\}$ равна корню квадратному из суммы квадратов его координат: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

Арифметические операции над векторами в пространстве осуществляются по тем же правилам, как и на плоскости.

№1. Даны точки A(3; 5; 0), B(2; –1; 4), C(0;3;2).

а) Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

б) Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{BC}$;

в) Найти координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$;

№2. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длины рёбер: $AB=2$; $BC=6$; $BB_1=4$.

а) введите систему координат с началом в точке B так, чтобы точка A лежала на оси *Ox*, точка C лежала на оси *Oy*. Для всех вершин параллелепипеда определите их координаты;

Приведём решение:

Найдём координаты всех восьми вершин:

$A(2;0;0)$, $A_1(2;0;4)$, $B(0;0;0)$, $B_1(0;0;4)$, $C(0;6;0)$, $C_1(0;6;4)$, $D(2;6;0)$, $D_1(2;6;4)$.

б) найдите координаты точки K – середины ребра AB и точки M – середины ребра DD_1;

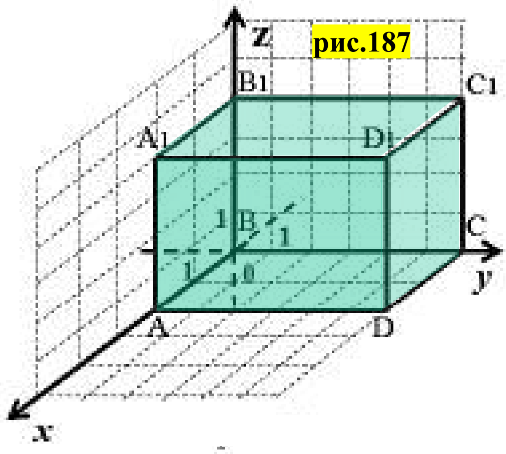


рис.187

в) найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{KM}$ и их длины.

№3. На готовом чертеже найдите координаты и длину вектора.

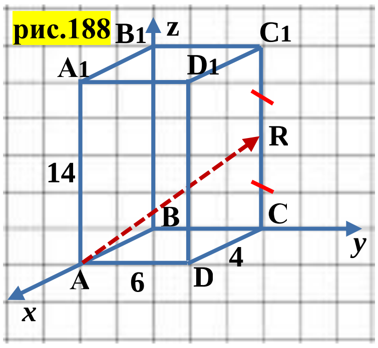


рис.188

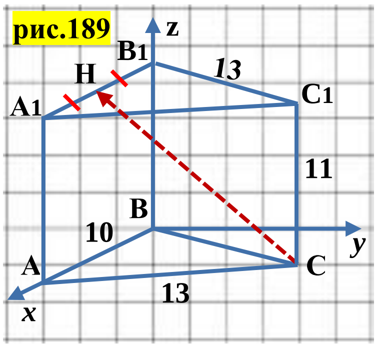


рис.189

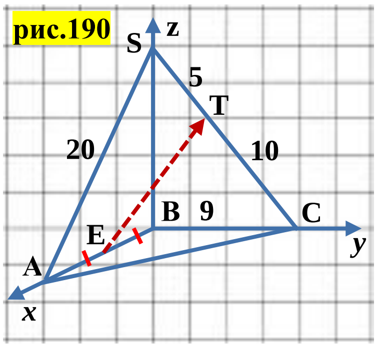


рис.190

Домашнее задание

1. На рисунке 191 найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{AM}$

2. Даны точки $A(1;\,2;\,3)$, $B(4;\,1;\,0)$, $C(6;\,0;\,\sqrt{14})$.

Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

3. Для параллелепипеда с длиной $AB=4$, шириной $BC=6$, высотой $AA_1=2$ введите систему координат.

а) найдите координаты всех его вершин;

б) найдите координаты середины его диагонали;

в) найдите расстояние от точки A_1 до центра грани BCC_1B_1.

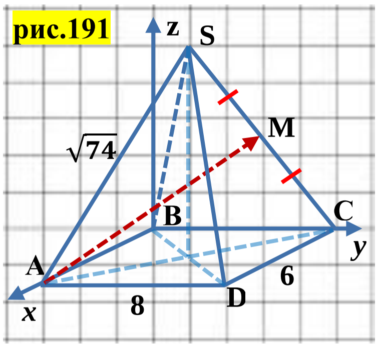


рис.191

Тема 41.2 Координаты точки и вектора в пространстве. Решение задач

№1. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ имеет ребро основания 4 и высоту $2\sqrt{3}$.

а) введите систему координат с началом в точке H – середине ребра AC так, что точки A и C будут лежать на оси *Oy*, точка B будет лежать на оси *Ox*. Определите координаты всех вершин;

б) найдите координаты точки P, которая делит ребро B_1C_1 в соотношении 1:3, считая от вершины B_1;

в) найдите координаты вектора $\overrightarrow{AP}$;

г) найдите длину вектора $\overrightarrow{AP}$.

№2. Правильная пирамида MABCD имеет ребро основания 6 и боковое ребро 5.

а) введите систему координат с началом в точке B так, что точка A будет лежать на оси *Ox*, точка C будет лежать на оси *Oy*. Определите координаты всех вершин;

б) найдите координаты точки K – середины AM;

в) найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{KD}$.

№3. Правильный тетраэдр MABC имеет ребро *a*.

а) введите систему координат с началом в точке H – середине ребра AC так, что точки A и C будут лежать на оси *Oy*, точка B будет лежать на оси *Ox*. Определите координаты всех вершин;

б) найдите координаты точки K – середины ребра AB и точки P – середины ребра MC;

в) найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{KP}$.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед с рёбрами AB=4, BC=5, AA_1=9. Точка К – середина ребра A_1B_1, точка Р лежит на ребре CC_1 так, что СР=3.

а) найдите длину вектора $\overrightarrow{KP}$;

б) найдите координаты середины АР.

2. Пирамида MABCD имеет ребра основания AB=6, BC=8 и боковые ребра 13.

а) введите систему координат с началом в точке В так, что точка А будет лежать на оси *Ox*, точка С будет лежать на оси *Oy*. Определите координаты всех вершин;

б) найдите координаты точки Т – середины высоты пирамиды;

в) найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{BT}$.

Тема 41.3 Координаты точки и вектора в пространстве. Решение задач

№1. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с диагоналями AC=8, BD=6. Высота призмы равна 5.

а) введите систему координат с началом в точке пересечения диагоналей ромба O так, чтобы точки A и C лежали на оси *Ox*, точки B и D лежали на оси *Oy*. Определите координаты всех вершин данной призмы;

б) найдите расстояние от точки А до центра грани BCC_1B_1.

№2. В основании пирамиды MABC лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами AB=4, BC=5. Высота BM=3.

а) введите систему координат с началом в точке B, чтобы точка A лежала на оси *Ox*, точки C лежала на оси *Oy*. Определите координаты всех вершин;

б) найдите расстояние от середины ребра AM до точки K, которая делит ребро BC в соотношении 2:3, считая от B.

№3. SABC – треугольная пирамида, рёбра основания AB=BC=10, AC=16. Точка S равноудалена от точек A, B, C. Высота пирамиды равна 3. Докажите, что проекция точки S на плоскость основания (ABC) лежит вне треугольника ABC.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 20. Точки Р и К – середины рёбер AA_1 и C_1D_1. Найдите длину отрезка РК.

2. МАВС – пирамида, в основании которой треугольник АВС с прямым углом В, а боковое ребро МВ перпендикулярно плоскости основания. АВ=$2\sqrt{7}$, ВС=4, МВ=$2\sqrt{5}$. Точка К – середина МС, точка Р – середина АВ. Докажите, что КР=ВС.

Тема 42.1 Параллельность и перпендикулярность векторов в пространстве

Коллинеарные векторы – это векторы, лежащие на параллельных прямых или на одной прямой. Признак коллинеарности векторов:

Два вектора коллинеарны, если координаты этих векторов пропорциональны.

Пусть даны два вектора: $\vec{a} = \{x_A;\ y_A; z_A\}$, $\vec{b} = \{x_B;\ y_B;\ z_B\}$.

Если $\frac{x_A}{x_B} = \frac{y_A}{y_B} = \frac{z_A}{z_B}$ то $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Для любой прямой в пространстве можно найти такой вектор, который будет лежать на ней, или будет параллелен ей.

Вектор $\vec{r}$ называют направляющим вектором прямой, если он лежит на этой прямой или параллелен ей.

Как найти направляющий вектор прямой? Достаточно знать координаты двух точек, лежащих на этой прямой, и получить по ним координаты вектора.

Если направляющие векторы прямых параллельны, то и сами прямые параллельны.

Таким образом, с помощью векторов можно доказывать параллельность прямых.

Скалярное произведение векторов – это произведение длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

В координатах скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответственных координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

Скалярное произведение – число, которое может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Если скалярное произведение положительно, то угол между векторами острый; если отрицательно, то угол между векторами тупой; если равно 0, то угол между векторами прямой. Получаем признак перпендикулярности векторов.

Если $x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Если направляющие векторы прямых перпендикулярны, то и прямые перпендикулярны. Стоит отметить, что под углом между прямыми мы понимаем не тупой угол, а именно острый.

№1. Даны точки A(1;2;3), B(5;1;6).

а) найдите координаты и длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

б) пусть $\vec{a} = \{6; -1{,}5;\ z\}$, найдите координату z, если $\vec{a} \parallel \overrightarrow{AB}$;

в) пусть $\vec{b} = \{x;\ 5;\ 4\}$, найдите координату x, если $\vec{b} \perp \overrightarrow{AB}$.

№2. Найдите пары параллельных и перпендикулярных векторов. $\vec{a} = \{6; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{3; -1;\ 4\}$, $\vec{c} = \{0; 0; 3\}$, $\vec{d} = \{2; 0; 0\}$, $\vec{e} = \{3; -1;\ 0{,}5\}$, $\vec{f} = \{-9; 3;\ -1{,}5\}$, $\vec{g} = \{3; 1;\ -2\}$.

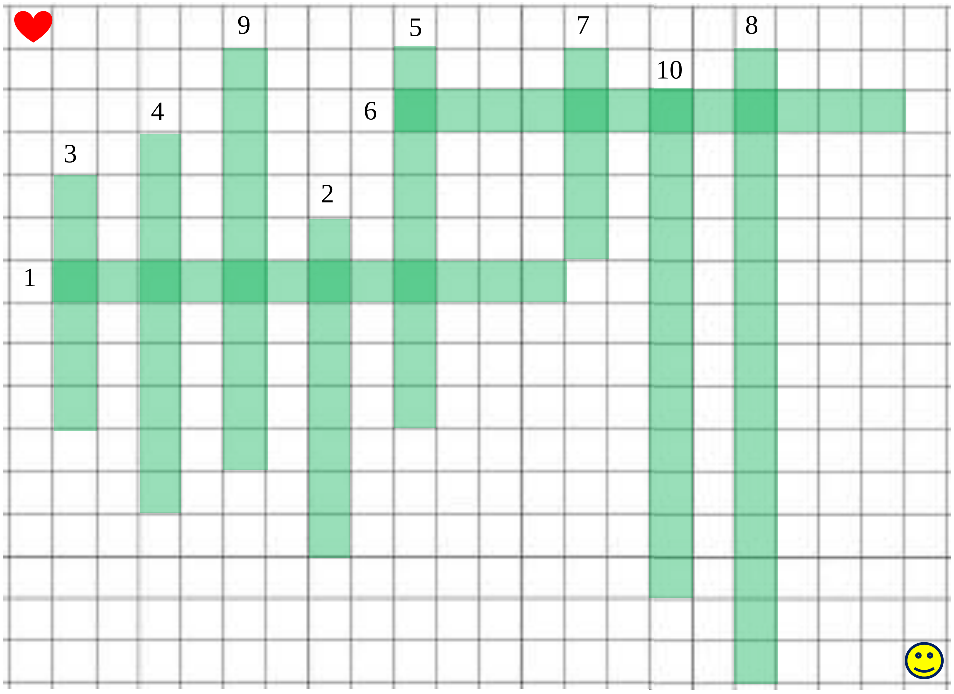
№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед с рёбрами AB=2, BC=4, CC_1=6. Точка T лежит на ребре B_1C_1 так, что B_1T=1. Верно ли то, что прямая BT ⊥ A_1T?

№4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 4. Точка P – центр грани CC_1D_1D. Точка K – середина ребра BB_1. Точка T лежит на грани BB_1C_1C и равноудалена от вершин B и C на расстояние $\sqrt{13}$. Верно ли, что прямые KD и TP параллельны?

Домашнее задание

1. В пространстве заданы точки: A(2;4;3), B(4;10;9), C(4;–3;–2), D(12;2;1), E(5;0;1). Их всеми возможными способами соединили по две, получив множество отрезков. Найдите среди этих отрезков одну пару параллельных и одну пару перпендикулярных.

2. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь, вопросы переписывать не нужно.



1. Два вектора, лежащие на параллельных прямых, называются (...).
2. Точка отрезка, равноудалённая от его концов.
3. Направленный отрезок.
4. Координата «высоты» точки в пространстве.
5. Произведение длин двух векторов на косинус угла между ними.
6. Три вектора с общим началом, лежащие в одной плоскости.
7. Одна из характеристик вектора.
8. Два коллинеарных вектора равной длины и противоположного направления.
9. Упорядоченный набор трёх чисел, показывающий положение точки в пространстве.
10. Вектор, параллельный прямой или лежащий на ней.

Тема 42.2 Параллельность и перпендикулярность векторов. Решение задач

№1. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, все рёбра которой равны 6. Точка К – середина ребра AA_1. Верно ли, что прямые KB_1 и BC_1 перпендикулярны?

№2. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания 8 и боковым ребром 6. Точка К – середина высоты пирамиды. Точка Р – середина апофемы грани ABM. Точка Т лежит на ребре ВС так, что СТ=2. Верно ли, что прямые $KC \parallel PT$?

№3. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция ABCD с основаниями AD и BC. $AD=AA_1=4$, $AB=BC=2$. Верно ли, что прямые DB_1 и A_1B_1 перпендикулярны?

№4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, боковое ребро $2\sqrt{2}$. Точки M, P, K взяты на ребрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 так, что $AM=PB_1=KC_1=2$. Плоскость MPK пересекает ребро AC в точке T. Верно ли, что MPKT – параллелограмм?

Домашнее задание

1. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида с ребром основания 8 и высотой 10. Точка К – середина ребра МС, точка Т лежит на отрезке BD так, что BT:TD = 3:1. Докажите, что прямые AT и DK перпендикулярны.

2. SABCD – пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами AB=8, BC=4. Грань ABS перпендикулярна плоскости основания, причём AS=BS. Высота пирамиды равна 12. Точка О – центр основания пирамиды, точка Р – середина ребра BS. Точка Т лежит на ребре AD так, что AT=1, точка М лежит на ребре AS так, что MS=3AM. Докажите, что прямые PO и MT параллельны.

Тема 43.1 Определитель матрицы. Компланарность векторов

Познакомимся с новым понятием – определитель. Определитель – это число, полученное по специальным правилам. Чтобы множество действий записать в компактной форме, используют запись в виде квадратной таблицы чисел.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Это определитель второго порядка, так как его размер 2×2.

Приведём пример его вычисления:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 4\cdot(-2) = 23$$

Вычислить определитель третьего порядка сложнее, для этого прибегают к правилу раскрытия по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

Приведём пример вычисления:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot 5 - 2\cdot 10 + 3\cdot 10 = 15$$

Геометрический смысл определителя – это объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах, координаты которых записаны в три строки определителя. Заметим, что значение определителя может быть отрицательным, это говорит об ориентации векторов пространстве, но не о том, что объём отрицателен. Иногда определитель равен нулю. Объём параллелепипеда может быть равен нулю только, если все три вектора лежат в одной плоскости.

Компланарные векторы – это векторы, лежащие в одной плоскости, при отложении их от одной точки. Три вектора компланарны, если определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю. Пусть даны векторы: $\vec{a} = \{1; 3; 0\}$, $\vec{b} = \{-1; 2;\ 1\}$, $\vec{c} = \{-2; 4; 2\}$. Докажем, что они компланарны, вычислив определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot 0 - 3\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$

№1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

№2. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

№3. Проверьте векторы на компланарность:

а) $\vec{a} = \{6; 3; 0\}$, $\vec{b} = \{-2; -1;\ 0\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 2\}$

б) $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 1;\ 1\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 1\}$

№4. Решите уравнение:

а) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} x+1 & 6 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$ в) $\begin{vmatrix} x & 1 & x-2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Домашнее задание

1. Найдите объём параллелепипеда построенного на векторах: $\vec{a} = \{2; 5; 1\}$, $\vec{b} = \{4; 1;\ 0\}$, $\vec{c} = \{3; 3; 3\}$. Какую часть от него составляет объём тетраэдра, построенного на тех же векторах?

2. Проверьте векторы на компланарность: $\vec{a} = \{2; 3; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 2;\ 3\}$, $\vec{c} = \{6; 9; 0\}$.

Тема 43.2 Уравнение плоскости

Как мы знаем, единственная плоскость проходит через три точки, если они не лежат на одной прямой. Рассмотрим точки $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}};\ y_{\mathrm{A}}; z_{\mathrm{A}})$, $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}};\ y_{\mathrm{B}}; z_{\mathrm{B}})$, $\mathrm{C}(x_{\mathrm{C}};\ y_{\mathrm{C}}; z_{\mathrm{C}})$. Понятно, что два вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}};\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}};\ z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}};\ y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}};\ z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}\}$ лежат в одной плоскости. Так же рассмотрим произвольную точку $\mathrm{M}(x;\ y;\ z)$, которая должна находиться в плоскости (ABC). Если она находится в той же плоскости, то вектор $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \{x - x_{\mathrm{A}};\ y - y_{\mathrm{A}};\ z - z_{\mathrm{A}}\}$ вместе с векторами $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ и $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ должны быть компланарны. Тоесть, определитель, составленный из трёх этих векторов должен быть равен нулю. Получаем уравнение плоскости:

$$\textbf{(ABC):}\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{y - y_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{z - z_{\mathrm{A}}} \\ \boldsymbol{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \\ \boldsymbol{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

где x, y, z – переменные в данном уравнении. Если раскрыть такой определитель и упростить, привести подобные, то мы получим общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$. Оно линейно и содержит три переменных. Пробуем на примере: A(2; 0; 0), B(3; 1; 5), C(-1; 1; 4).

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 3-2 & 1-0 & 5-0 \\ -1-2 & 1-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

После упрощения получаем: $-x - 19y + 4z + 2 = 0$

Что мы понимаем, установив уравнение плоскости? Теперь можно узнать: проходит ли плоскость через данную точку. Например, через точку K(19; –1; –0,5)? Подставим координаты точки K в уравнение плоскости:

$-19 - 19 \cdot (-1) + 4 \cdot (-0{,}5) + 2 = 0$ – истина, и это говорит нам о том, что точка K лежит на данной плоскости.

Второй способ задания плоскости, как мы знаем – по двум точкам $\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}};\ y_{\mathrm{A}}; z_{\mathrm{A}})$, $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}};\ y_{\mathrm{B}}; z_{\mathrm{B}})$ и параллельно некоторой прямой с её направляющим вектором $\vec{r} = \{m;\ p;\ k\}$. В таком случае в рассмотренном уравнении третью строку определителя заменяют координатами направляющего вектора:

$$\textbf{(ABC):}\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{y - y_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{z - z_{\mathrm{A}}} \\ \boldsymbol{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}} & \boldsymbol{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Это уравнение является прямым следствием из уравнения плоскости по трём точкам.

№1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, и приведите его к общему виду:

а) A(2; 0; 0), B(3; 5; 1), C(6; 0; 2);

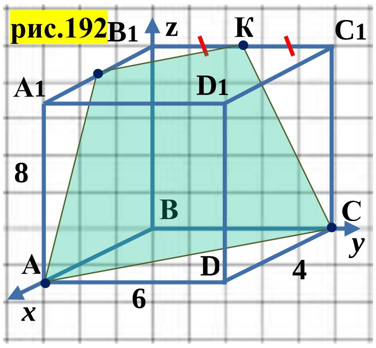
б) M(1; 2; 3), К(5; −5; 0), T(1; 1; 1).

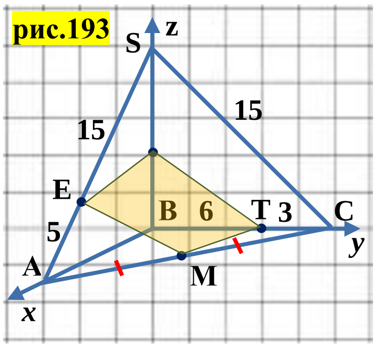
№2. Дано уравнение плоскости: $5x - 2y - 3z + 1 = 0$.

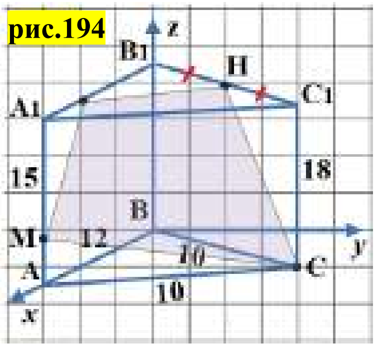
а) проходит ли эта плоскость через точку К(1; 0; 3)?

б) проходит ли эта плоскость через точку P(1; 3; 0)?

№3. Составьте уравнение плоскости сечения. Найдите координаты точки, в которой эта плоскость пересекает четвёртое ребро.





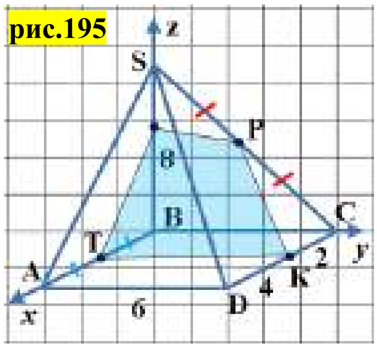


Домашнее задание

1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через A(3; 1; 0), B(0; 1; 1), C(1; 2; 1) и приведите его к общему виду.

2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через A(0; 0; 0), B(0; 3; 2), C(4; 2; 0) и приведите его к общему виду

3. Составьте уравнение плоскости сечения на готовом чертеже. Найдите координаты точки, в которой эта плоскость пересекает ребро BS.



Тема 43.3 Уравнение плоскости. Решение задач

№1. Составьте уравнение плоскости через две данные точки и параллельно вектору:

а) A(1; 0; 0), B(2; 1; 0), $\vec{g} = \{1; 3; 2\}$;

б) C(0; 0; 3), D(4; 1; 1), $\vec{p} = \{0; -1; 1\}$.

№2. Докажите, что A(1; 0; 0), B(3; 2; 0), C(−1; 2; 5), D(2; 1; 0) лежат на одной плоскости. Лежит ли точка M(3;1;1) на данной плоскости? Найдите любые две точки, лежащие на этой плоскости.

№3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$

даны ребра $AA_1=10$, $AB=2\sqrt{2}$, AD=6. Точка E делит ребро AA_1 в соотношении 2:3 , считая от вершины A. Точка F делит ребро BB_1 в соотношении 7:3 , считая от вершины B. Точка T – середина ребра B_1C_1. Докажите, что плоскость (ETF) содержит точку D_1.

№4. В основании четырёхугольной пирамиды MABCD лежит прямоугольник AB=6, BC=8. Вершина пирамиды проецируется в точку B, причём MB=6. Точка К – середина ребра MC, точка T делит ребро MB в соотношении 1:2, считая от вершины M. Докажите, что плоскость (ATK) делит ребро CD пополам.

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром a. Введите систему координат с началом в точке B(0;0;0) так, чтобы точки A и C лежали на осях *Ox* и *Oy* соответственно. Установите общее уравнение плоскости, которая проходит через середины рёбер AB, B_1C_1 и DD_1.

2. MABCD – правильная пирамида с ребром основания 6 и высотой 5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A, C и параллельно ребру BM. В каком месте эта плоскость пересекает ребро MD?

Тема 43.4 Уравнение плоскости. Решение задач

№1. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со сторонами $AB=BC=10$, $AC=12$, высота призмы равна 12. Точка T – середина CC_1, точка K – середина A_1C_1. В каком соотношении плоскость (BTK) делит ребро A_1B_1?

№2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точки K и E –середины ребер AA_1 и D_1C_1 Точка M делит ребро DD_1 в соотношении 3:1, считая от вершины D. Доказать, что плоскость, проходящая через точки K, E, M содержит точку B_1.

№3. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром основания 4 и высотой 8. Точка K делит ребро AA_1 в соотношении 1:3, считая от вершины A, точка M – середина ребра B_1C_1. Докажите, что плоскость сечения, проходящего через точки K, M и C, делит ребро AD в соотношении 1:7, считая от вершины A.

№4. Известно, что три плоскости пересекаются в одной точке, найдите эту точку:

а) $\alpha: 2x+y-3z+5=0, \quad \beta: x+y-3=0, \quad \gamma: x-y+z-2=0;$

б) $\alpha: x-y+2=0, \quad \beta: x+5z+1=0, \quad \gamma: x+y+z=0.$

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – призма, все рёбра которой равны 12. Точка M делит ребро AC в соотношении 1:3, считая от A. Точка P – середина AB. Точка K делит ребро BB_1 в соотношении 1:2, считая от B. Докажите, что плоскость (MPK) содержит точку C_1.

2. MABCD – правильная четырёхугольная пирамида, все рёбра которой равны 6. Точка K – середина MC, точка P лежит на ребре AM так, что AP=2. Плоскость сечения проходит через точки B, P, K. Докажите, что сечение делит высоту пирамиды в соотношении 3:4.

Тема 44.1 Нормальный вектор плоскости

Сформулируем определение: **Нормальный вектор плоскости – это вектор перпендикулярный данной плоскости**.

Пусть есть вектор $\vec{n}=\{A;B;C\}$, перпендикулярный к плоскости. В этой плоскости есть точка $M(x_0;y_0;z_0)$ и некоторая точка с переменными координатами $N(x;y;z)$. Тогда векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{MN}$ должны быть перпендикулярны. Это значит, что их скалярное произведение равно нулю. Получаем уравнение

$$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(x-x_0)+C(x-x_0)=0}$$

плоскости задана точкой $M(x_0;y_0;z_0)$ и вектором $\{A;B;C\}$, перпендикулярным к ней. Раскрыв скобки, мы получим общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Сформулируем признак:

Две плоскости параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны.

Рассмотрим пару перпендикулярных плоскостей. Признак:

Две плоскости перпендикулярны, если их нормальные векторы перпендикулярны.

Рассмотрим теперь прямую с её направляющим вектором и параллельную ей плоскость с её нормальным вектором. Признак:

Прямая и плоскость параллельны, если направляющий вектор данной прямой перпендикулярен нормальному вектору данной плоскости.

Рассмотрим прямую и перпендикулярную ей плоскость:

Прямая и плоскость перпендикулярны, если направляющий вектор данной прямой коллинеарен нормальному вектору данной плоскости.

При решении задач стоит учесть, что есть так называемые частные случаи уравнения плоскости. Рассмотрим плоскость *Oxy*. Множество точек в этой плоскости имеют аппликату 0. Поэтому уравнение этой плоскости можно записать в таком виде: $z=0$. Вектор нормаль данной плоскости $\vec{n}=\{0;0;1\}$. Каким уравнением и нормалью обладают плоскости *Oyz* и *Oxz*? Попробуйте ответить на этот вопрос.

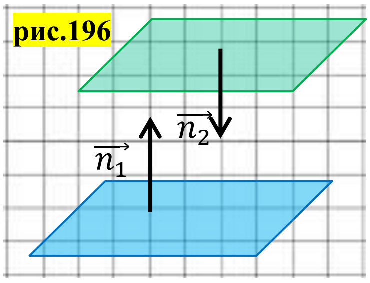


рис.196

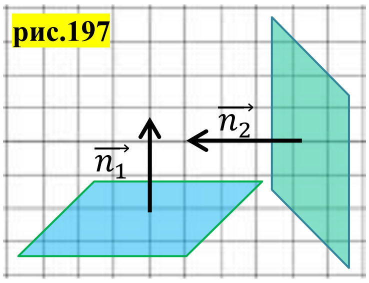


рис.197

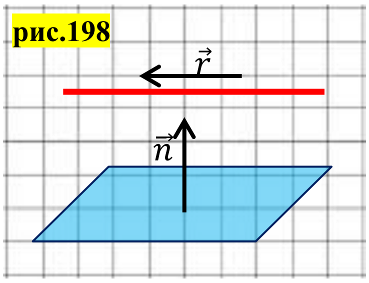


рис.198

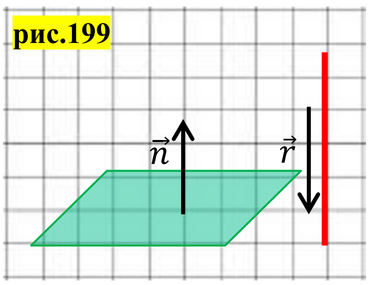


рис.199

№1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку и перпендикулярно вектору:
а) T(2; 1; 5), $\vec{n} = \{1; -2; 3\}$;
б) P(−2; 0; 4), $\vec{n} = \{0; 5; 2\}$.

№2. Даны параллельные плоскости α: $3x - y + 2z + 2 = 0$ и β: $-6x + 2y + Cz + 7 = 0$ Найдите C.

№3. Даны перпендикулярные плоскости α: $4x - 5y + z + 1 = 0$ и β: $x + By - z + 3 = 0$ Найдите B.

№4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с диагоналями AC=8, BD=6. Боковое ребро равно 12. На ребре BB_1 отмечена точка M так, что $BM:BM_1 = 1:7$. Проверьте утверждение: $MD \perp (ACD_1)$.

Домашнее задание

1. Определите координаты нормали для плоскости (ABC), если A(1;2;3), B(0;4;1), C(1;–1;0).

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB=8, BC=6, AA_1=12. Точка K – середина ребра AD, точка M лежит на ребре DD_1 так, что $DM:D_1M = 1:2$. Докажите, что прямая BD_1 параллельна плоскости (CKM).

Тема 44.2 Нормальный вектор плоскости. Решение задач

№1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно $7\sqrt{3}$ боковое ребро равно 8. Докажите, что плоскость (BCA_1) перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

№2. На продолжении высоты PO правильной четырехугольной пирамиды PABCD отмечена точка K так, что OP=OK. Докажите, что плоскости (PBC) и (KAD) параллельны.

№3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра $AB=AA_1=6$, BC=4. Точка P – середина ребра AB, точка M лежит на ребре DD_1 так, что $DM:D_1D = 2:3$. Докажите, что прямая BD_1 параллельна плоскости (MPC).

№4. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD ребро основания равно 4, а боковое ребро равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём AM=SK=1. Докажите, что плоскость (CKM) перпендикулярна плоскости (ABC).

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед с рёбрами AB=5, BC=6, AA_1=4. Точка P лежит на ребре AB так, что AP=1. Точка M – середина AD. Точка K лежит на ребре CC_1 так, что CK=1. Плоскость β проходит через точки A_1, M, K. Докажите, что прямая PB_1 параллельна плоскости β.

2. MABCD – пирамида, в основании которой прямоугольник со сторонами AB=10, BC=20, вершина пирамиды M проецируется точно в центр основания, высота пирамиды равна $5\sqrt{11}$. Точка P – середина BM, точка K лежит на ребре AD так, что AK=15. Плоскость β проходит через точки K, P, C. Докажите, что ребро BM перпендикулярно плоскости β.

Тема 45.1 Углы в пространстве. Угол между прямыми

По определению скалярное произведение векторов – это произведение их длин на косинус угла между ними. Откуда косинус угла между векторами можно определить, как отношение их скалярного произведения к произведению их длин.

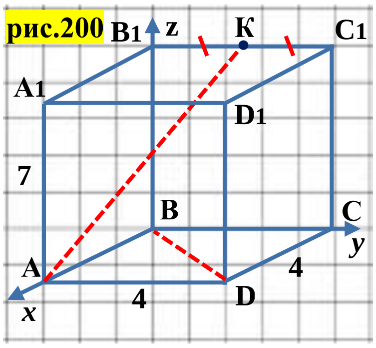
Угол между направляющими векторами прямых, в силу самого их определения, равен углу между прямыми.

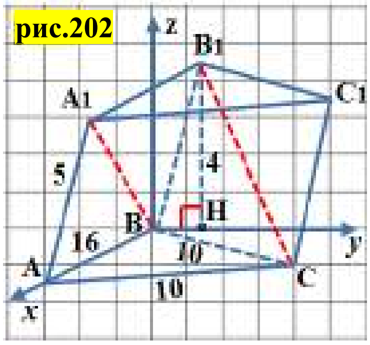
$$\angle(\boldsymbol{l_1};\ \boldsymbol{l_2}) = \boldsymbol{arccos}\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}| \cdot |\overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}|}$$

Почему же в данных формулах скалярное произведение векторов взято под знак модуля? Ранее мы уже обсуждали, что скалярное произведение может привести к отрицательному значению, а сам угол окажется тупым. Но под углом между прямыми и плоскостями всегда подразумевается именно острый угол. Если в задаче надо найти угол между гранями, то он может быть тупым, так как две грани образуют единственный угол.

№1. Пусть: A(3;–2; 4), B(4;–1; 2), P(6;–3; 2), K(7;–3; 1).
а) найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PK}$;
б) найдите угол между векторами $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{PB}$.

№2. По готовому чертежу найдите угол между выделенными прямыми.

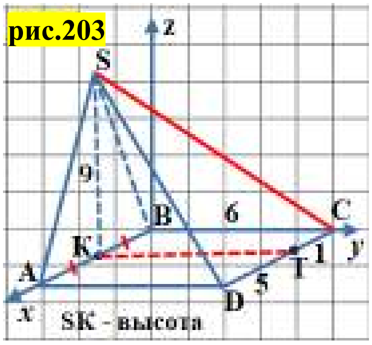




Домашнее задание

1. Даны точки: A(1;–5; 2), B(3;–1; 0), C(0;3; 0), найдите угол между прямыми AB и CA.

2. По готовому чертежу найдите угол между выделенными прямыми.



3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 4. Точки K и N – середины рёбер AD и CD. Точка M лежит на ребре AA_1 так, что AM=3, точка P лежит на A_1B_1 так, что длина отрезка A_1P=3. Найдите угол между прямыми MN и PK.

Тема 45.2 Углы в пространстве. Угол между прямой и плоскостью

Другая ситуация с прямой и плоскостью. Нормальный вектор плоскости и направляющий вектор прямой образуют угол, с которым искомый угол даёт сумму 90°. И поэтому мы можем найти не косинус, а синус этого угла.

$$\angle(\boldsymbol{l};\ \boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{arcsin}\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}|}{|\vec{\boldsymbol{r}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{n}}|}$$

№1. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α:

а) α: $2x - 2y + z - 10 = 0$, A(5; 1; −4), B(6; 1; −3);

б) α: $4y - z + 3 = 0$, A(−1; 0; −2), B(1; 1; 3).

№2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 7 точка M лежит на ребре CD так, что CM=3. Найдите угол между прямой BD_1 и плоскостью сечения (AMB_1)

№3. В правильной пирамиде SABCD рёбра основания равны 4, высота 10. Найдите угол между гранью BSC и прямой, проходящей через точку A и середину высоты пирамиды.

№4. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб со стороной 10 и диагональю AC=16. Высота призмы равна 15. Точка K – середина ребра B_1C_1. Найдите угол между прямой AK и гранью BCC_1B_1.

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 4 и боковым ребром 2. Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью (ACB_1).

2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник со сторонами AB=4, BC=$4\sqrt{3}$. Высота призмы равна 8. Точка P – середина ребра AA_1, точка K – делит ребро BC в соотношении 3:1, считая от B.

а) найдите угол между прямыми PK и A_1D;

б) найдите угол между прямой PK и плоскостью (AB_1C).

Тема 45.3 Углы в пространстве. Угол между плоскостями

Угол между плоскостями в точности повторяет угол между их нормальными векторами.

$$\angle(\boldsymbol{\alpha_1};\ \boldsymbol{\alpha_2}) = \boldsymbol{arccos}\frac{|\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}|}{|\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}|\cdot|\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}|}$$

Важно помнить, что угол между плоскостями – это острый угол по определению, а угол между гранями многогранника может быть и тупым. В задаче внимательно читайте вопрос, чтобы правильно на него ответить.

№1. Найдите угол между плоскостями:
а) $\alpha: 3x + 2y - \sqrt{3}z + 7 = 0$ и $\beta: x + y + 2 = 0$;
б) $\alpha: 2x + 4y - 4z + 1 = 0$ и $\beta: 4x + 3y - 5 = 0$.

№2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра равны $2\sqrt{3}$. Точка К – середина ребра CC_1. Плоскость сечения β проходит через точки А, В, К. Найдите угол между плоскостью β и плоскостью (BCC_1);

№3. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием АВС, АВ=АС=5, ВС=8. Высота призмы равна 3. Точка М является серединой ребра B_1C_1.
а) докажите, что $(BA_1M) \perp (BCC_1)$;
б) найдите угол между (BA_1M) плоскостью основания призмы.

№4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребре AA_1 взята точка Е так, что $A_1E:EA = 3:4$. Точка Т – середина ребра B_1C_1. Известно, что АВ=9, AD=6 , $AA_1=14$.
а) докажите, что плоскость сечения (ETD_1) делит ребро BB_1 в соотношении 3:11;
б) найдите угол между плоскостями (ETD_1) и (AA_1B_1).

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 4. Точка Р лежит на ребре АВ так, что АР=1. Найдите угол между плоскостями (PB_1C) и (PA_1C_1)

2. МАВС – треугольная пирамида, её боковая грань МАС перпендикулярна грани основания АВС, и они обе являются правильными треугольниками со стороной $2\sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостями (АВМ) и (ВСМ).

Тема 46.1 Формула расстояния от точки до плоскости

Пусть дана точка $M(x_M;\, y_M;\, z_M)$ и плоскость заданная уравнением: $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние от точки М до плоскости α можно определить по формуле:

$$\boldsymbol{\rho(M;\ \alpha) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

№1. Найдите по формуле расстояние:
а) от точки М(–1; 2; 3) до плоскости $\alpha: 2x - 6y - 3z + 2 = 0$;
б) от точки Р(3; –1; 0) до плоскости $\beta: 5x + y - \sqrt{10}z + 1 = 0$;

№2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Точка Р – середина ВС. Найдите расстояние от D_1 до плоскости (APB_1).

№3. В правильной треугольной пирамиде МАВС ребро основания равно 6, боковое ребро равно 4. Найдите расстояние от точки К – середины ребра МС до плоскости (МАВ).

№4. В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник АВС с прямым углом С, АС=4, ВС=16, $AA_1=4\sqrt{3}$. Точка К –середина A_1B_1, точка Р делит ребро B_1C_1 в соотношении 3:1, считая от B_1. Найдите расстояние от точки A_1 до (АРК).

Домашнее задание

1. $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма с ребром основания 2 и боковым ребром 3. Найдите расстояние от точки С до плоскости (ABC_1).

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма с ребром основания 4 и боковым ребром 9. Точка К лежит на ребре DD_1 так, что DК=3. Найдите объём пирамиды B_1ACK.

Тема 46.2 Формула расстояния от точки до плоскости. Решение задач

№1. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD ребро основания равно 4, боковые рёбра равны $\sqrt{33}$. Найдите расстояние от середины ребра АВ до плоскости (ВСМ).

№2. Ребро основания правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 8, а высота призмы равна 10. На ребре AA_1 лежит точка К, так, что $AK:A_1K = 2:3$, на ребре DD_1 лежит точка М, так, что $DM:MD_1 = 4:1$.
а) докажите, что (ВМК) ∥ АС;
б) найдите расстояние от точки А до плоскости (ВМК).

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – наклонная призма, в основании которой лежит квадрат. Точка Н – середина ребра ВС, вершина B_1 расположена так, что прямая B_1H перпендикулярна плоскости основания, $BH=\sqrt{3}$, боковое ребро наклонено к основанию под углом 60°. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости (AB_1C).

№4. SABCD – пирамида, в основании которой лежит ромб с диагоналями AC=20, BD=48, пересекающимися в точке O. Известно, что высота пирамиды SO=7. Точка M – середина ребра AD. Найдите расстояние от точки D до плоскости (SBM).

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 8. Точка P лежит в центре грани ABB_1A_1. Найдите расстояние от точки P до плоскости (BC_1D).

2. SABCD – пирамида, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами AB=10, BC=24. Все рёбра равны, а высота пирамиды 20. Найдите расстояние от A до плоскости (BSC).

Тема 47.1 Подведение итогов главы. Решение задач

№1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра AB=5, BC=6, $CC_1=9$. Точка K лежит на ребре AB так, что AK=2, точка P – середина B_1C_1. Плоскость β проходит через точки K, P, D_1. T – точка пересечения плоскости β и ребра AD.

а) найдите угол между прямыми B_1D и C_1T;

б) найдите угол между прямой B_1D и плоскостью β;

в) найдите угол между плоскостью (BCC_1) и плоскостью β.

№2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M – середина AC, точка K – середина BC_1. Точка T – середина A_1B_1.

а) верно ли, что прямые MK и AB_1 параллельны?;

б) верно ли, что прямые MK и C_1T перпендикулярны?

№3. В правильной пирамиде MABC ребро основания 6, боковое ребро 12. K – середина AC.

а) найдите расстояние от точки C до плоскости (ABM);

б) найдите расстояние от точки K до плоскости (ABM).

№4. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M, ребром основания $15\sqrt{2}$, точка K лежит на ребре AM так, что AK=9, KM=16, O – центр основания пирамиды.

а) докажите, что прямые AM и OK перпендикулярны;

б) найдите угол между прямой AC и плоскостью (ABM).

Домашнее задание

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед с рёбрами AB=6, BC=5, $AA_1=6$. Точка M лежит на ребре AA_1 так, что AM=4, точка P лежит на ребре AD так, что AP=2. Точка K – середина ребра CD. Плоскость γ проходит через точки M, P, K.

а) докажите, что плоскость γ содержит точку C_1;

б) докажите, что прямая, проходящая через точку A и середину A_1B_1 параллельна плоскости γ;

в) в каком соотношении плоскость сечения γ делит ребро A_1B_1?

2. В основании пирамиды SABCD лежит трапеция со сторонами AB=CD=10, BC=4, AD=16. Грань BSC перпендикулярна плоскости основания, $SB=SC=\sqrt{29}$.

а) найдите угол между прямой AS и плоскостью основания;

б) найдите угол между гранью ABS и плоскостью основания.

Тема 47.2 Подведение итогов главы. Решение задач

№1. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, M, K соответственно так, что PA=AM=KC=2.

а) докажите, что плоскость (PMK) перпендикулярна SD;

б) докажите, что плоскость (PMK) параллельна SB.

№2. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания 4, боковое ребро 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K так, что AM=SK=1.

а) докажите, что (CKM) $\perp$ (ABC);

б) найдите угол между плоскостью (CKM) и прямой AS.

№3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырёхугольная призма с ребром основания 6, высотой $3\sqrt{2}$. На ребрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём BK=4, $C_1L=5$. Плоскость сечения β параллельна прямой BD и проходит через точки K и L.

а) докажите, что $AC_1 \perp \beta$;

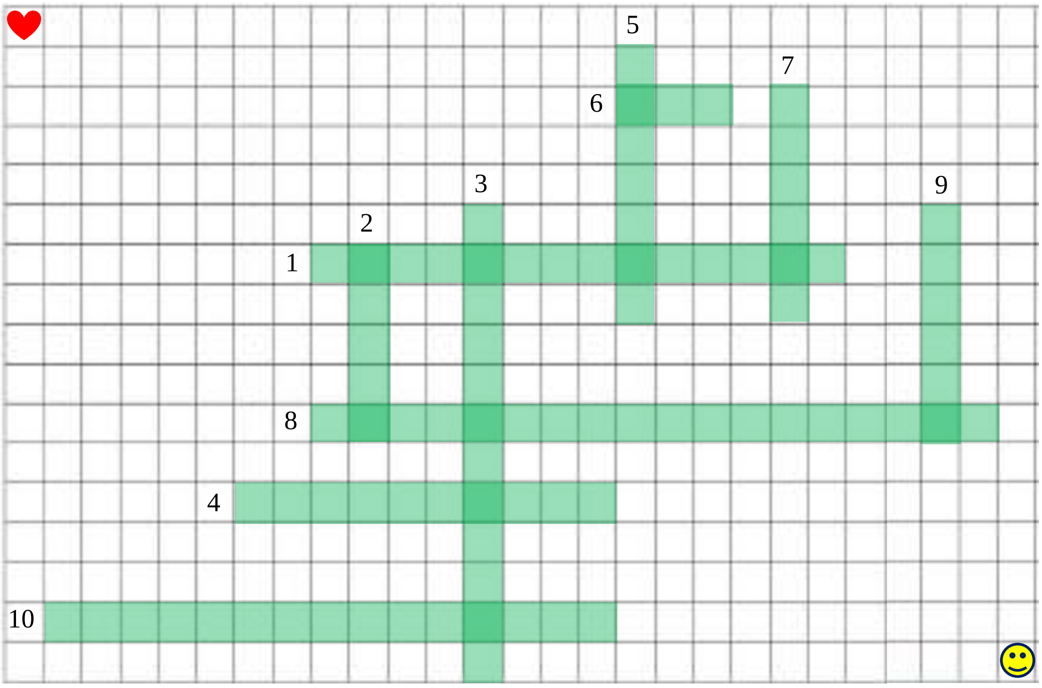
б) найдите расстояние от точки B_1 до плоскости β.

№4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания $2\sqrt{3}$, высота 3, К – середина АС.
а) докажите, что прямая $B_1K \perp (BA_1C_1)$;
б) найдите угол между плоскостями (BA_1C_1) и (ABB_1).

№5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 4.
а) найдите угол между прямыми AC_1 и BE_1;
б) найдите расстояние от точки А до плоскости (A_1BK), где К – середина DD_1;
в) найдите угол между плоскостью (A_1BK) и плоскостью основания.

Домашнее задание

1. Кроссворд. Перенесите сетку с ответами в тетрадь, вопросы переписывать не нужно.



1. Коллинеарные векторы с одинаковым направлением.
2. Уравнение плоскости вида $Ax + By + Cz + D = 0$.
3. Квадратная таблица элементов – краткая форма записи множества действий, уравнений и т.д.
4. Обратная тригонометрическая функция, которая есть в формуле угла между прямыми.
5. Вектор, перпендикулярный к плоскости.
6. Единичный радиус-вектор.
7. Какой вид угла подразумевают под углом между двумя прямыми?
8. Что доказывается через параллельность нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой?
9. Учёный, в честь которого называют систему координат.
10. Вектора параллельны, если их координаты (…).

2. $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, у которой в основании треугольник АВС со сторонами АВ=ВС=3, $AC=3\sqrt{3}$. Точка Р лежит на ребре A_1C_1 так, что $A_1P=\sqrt{3}$. Высота призмы $\sqrt{22}$.
а) докажите, что прямые РВ и B_1C_1 перпендикулярны;
б) найдите угол между прямыми РВ и AC_1.

3. SABC – правильная пирамида с ребром основания 6 и высотой 16. Точка К лежит на середине высоты пирамиды.
а) найдите угол между прямыми АК и ВС;
б) найдите угол между прямой АК и плоскостью (BCS);
в) найдите угол между плоскостями (АКС) и (BCS).

4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M, P, K, T, E, H – середины рёбер AA_1, AD, CD, CC_1, C_1B_1, B_1A_1. Найдите объём шестиугольной пирамиды $D_1MPKTEH$.

*Основные свойства окружности

1. Окружность – множество всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой центром.

2. Радиус – отрезок, соединяющий точку окружности с её центром.

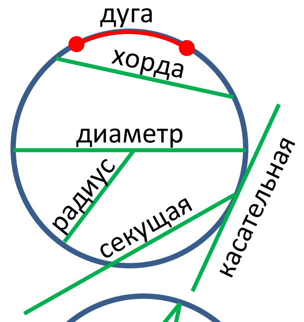
3. Хорда – отрезок, соединяющий две точки, лежащие на окружности.

4. Диаметр – наибольшая хорда, равная двум радиусам.

5. Касательная – прямая, имеющая 1 общую точку с окружностью.

6. Секущая – прямая, имеющая 2 общие точки с окружностью.

7. Дуга – часть окружности, ограниченная парой точек.

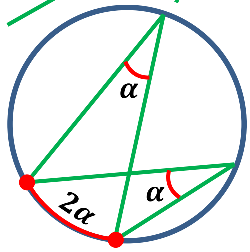


8. Вписанный угол – угол с вершиной на самой окружности.

9. Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

10. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу – равны.

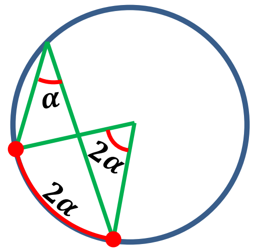
11. Если пара равных углов опираются на один и тот же отрезок, то четыре точки – вершины этих углов и концы этого отрезка лежат на одной окружности.



12. Центральный угол – это угол с вершиной в центре окружности.

13. Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

14. Если центральный и вписанный угол опираются на одну дугу, то центральный угол в два раза больше вписанного угла.

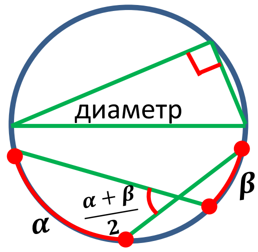


15. Если центральный угол опирается на хорду, равную радиусу окружности, то он равен 60°.

16. Если вписанный угол опирается на хорду, равную радиусу окружности, то он равен 30°.

17. Если вписанный угол опирается на диаметр, то он равен 90°.

18. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме дуг, отсеченных хордами.

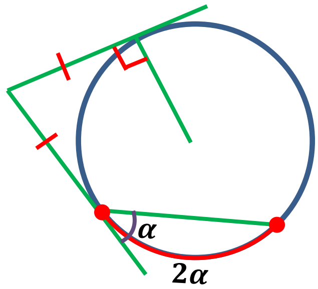


19. Касательная и радиус, проведённый в точку касания, образуют прямой угол.

20. Касательная и хорда, проведённая в точку касания, образуют угол, равный половине дуги, отсечённой этой хордой.

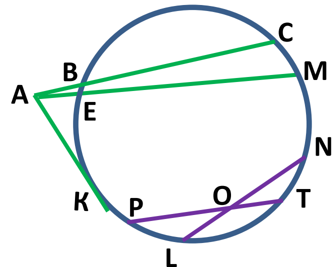
21. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то отрезки этих касательных равны.

22. Если из одной точки к окружности проведена касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению всей секущей на её внешнюю часть $\mathrm{AK}^2 = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{AB}$.



23. Если из точки к окружности проведены две секущих, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть $\mathrm{AM} \cdot \mathrm{AE} = \mathrm{AC} \cdot \mathrm{AB}$**.**

24. Если две хорды пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой $\mathrm{PO} \cdot \mathrm{OT} = \mathrm{LO} \cdot \mathrm{ON}$**.**

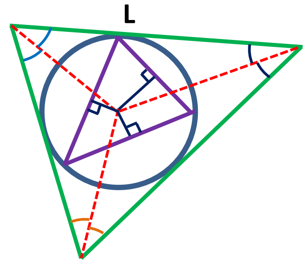


25. В любой треугольник можно вписать окружность, её радиус равен отношению площади треугольника к его полупериметру.

26. Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрис его углов.

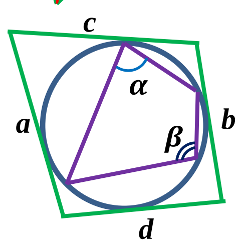
27. Любой треугольник можно описать окружностью, её радиус равен отношению стороны треугольника к двум синусам противолежащего угла.

28. Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения его серединных перпендикуляров.



29. Если четырёхугольник можно описать окружностью, то сумма противоположных углов равна $\alpha + \beta$ =180°.

30. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны $a + b = c + d$



Челябинск 2024